

Méthode de Newton pour la décomposition de Dunford.

Leçons : 155, 157, 226.

Référence : Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 pp.162-164, de Caldero et Germoni.

Théorème : Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ_A . Posons $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi'_A}$ (on peut le faire car χ_A est non constant et la caractéristique est nulle, donc χ'_A est non nul), $A_0 = A$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$ $A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}$. Cette suite est bien définie et stationnaire à partir de $\lceil \log_2(n) \rceil$ (partie entière supérieure du logarithme en base 2 de n). Notons D sa limite. D est semi-simple (i.e. diagonalisable dans une clôture algébrique de $\mathbb{K}$), $A - D$ est nilpotente, et D et $A - D$ commutent. De plus si $D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semi-simple, si $A - D'$ est nilpotente et si D' et $A - D'$ commutent, alors $D' = D$.

Preuve : Remarquons tout d'abord que P est à racines simples dans une clôture algébrique de $\mathbb{K}$. En effet, si λ_i a multiplicité m_i pour χ_A alors elle est de multiplicité $m_i - 1$ pour χ'_A . Posons $k = \lceil \log_2(n) \rceil$. Nous allons montrer par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$ que :

$$A_r \in \mathbb{K}[A], \quad P(A_r)^{2^{\max(0, k-r)}} = 0_n, \quad P'(A_r) \text{ est inversible.}$$

Ceci nous donnera le fait que (A_r) est bien définie et stationnaire à partir de k et que $P(D) = 0_n$ (car $2^{\max(0, k-r)} = 1$ si $r \geq k$). Or P est à racines simples donc on aura aussi la semi-simplicité de D .

De plus, on aura $D \in \mathbb{K}[A]$ et $A - D \in \mathbb{K}[A]$ d'où la commutativité de D et $A - D$ et on aura $A - D = A_0 - A_k = \sum_{i=0}^{k-1} (A_i - A_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} P(A_i)P'(A_i)^{-1}$ nilpotente car somme de matrices nilpotentes qui commutent (car ce sont des polynômes en A ; $P(A_i)P'(A_i)^{-1}$ est nilpotente car $P(A_i)$ l'est et ces deux matrices commutent, étant des polynômes en A).

Passons à la récurrence.

Initialisation : $A_0 = A \in \mathbb{K}[A]$, $P(A_0)^{2^{\max(0, k-0)}} = P(A)^{2^k}$ or $2^k \geq n$ et $P(A)^n = P^n(A) = 0_n$ (car χ_A divise P^n (car χ_A est de degré n et a les mêmes

racines que P) et par le théorème de Cayley-Hamilton) donc $P(A)^{2^k} = 0_n$, et $P'(A_0) = P'(A)$ est inversible car ses valeurs propres sont les $P'(\lambda_i)$ (où les λ_i sont les valeurs propres de A et donc les racines de P) donc non nulles car P est à racines simples.

Hérédité : Supposons, pour un $r \in \mathbb{N}$ fixé, que $A_r \in \mathbb{K}[A]$, $P(A_r)^{2^{\max(0, k-r)}} = 0_n$, $P'(A_r)$ est inversible.

On constate tout d'abord que A_{r+1} est bien définie et appartient à $\mathbb{K}[A]$.

Montrons que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ il existe $\tilde{Q} \in \mathbb{K}[X, Y]$ tel que :

$$Q(X + Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X, Y).$$

Remarquons qu'il suffit de le montrer pour les puissances de X , et que pour tout $m \in \mathbb{N}$, par la formule du binôme de Newton, on a :

$$(X + Y)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} X^i Y^{m-i} = X^m + YmX^{m-1} + Y^2 \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m}{i} X^i Y^{m-i-2}.$$

En particulier, il existe $\tilde{P} \in \mathbb{K}[X, Y]$ tel que $P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2\tilde{P}(X, Y)$. Évaluons en $(A_r, -P(A_r)P'(A_r)^{-1})$:

$$P(A_{r+1}) = P(A_r) - P(A_r)P'(A_r)^{-1}P'(A_r) + (-P(A_r)P'(A_r)^{-1})^2\tilde{P}(A_r, -P(A_r)P'(A_r)^{-1})$$

$$\text{d'où } P(A_{r+1}) = P(A_r)^2(P'(A_r)^{-1})^2\tilde{P}(A_r, -P(A_r)P'(A_r)^{-1})$$

or ces polynômes en A_r commutent et $P(A_r)^{2^{\max(0, k-r)}} = 0_n$ donc :

$$P(A_{r+1})^{2^{\max(0, k-r-1)}} = 0_n.$$

Remarquons que P et P' sont premiers entre eux (car P est à racines simples) donc, par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VP' = 1$, d'où $V(A_{r+1})P'(A_{r+1}) = I_n - U(A_{r+1})P(A_{r+1})$ or $P(A_{r+1})$ est nilpotente et commute avec $U(A_{r+1})$ (car ce sont des polynômes en A_{r+1}) donc $U(A_{r+1})P(A_{r+1})$ est nilpotente donc trigonalisable de valeurs propres nulles donc $I_n - U(A_{r+1})P(A_{r+1})$ est trigonalisable de valeurs propres 1 donc $V(A_{r+1})P'(A_{r+1})$ est de déterminant 1 donc $P'(A_{r+1})$ est de déterminant non nul donc $P'(A_{r+1})$ est inversible.

Si $D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semi-simple, si $A - D'$ est nilpotente et si D' et $A - D'$ commutent, alors D' commute avec $A = A - D' + D'$ donc avec $D \in \mathbb{K}[A]$ et $A - D'$ commute avec $D - A$ donc $D - D' = D - A + A - D'$ est semi-simple et nilpotente donc est nulle donc $D' = D$.