

Isométries du tétraèdre et isométries du cube.

Référence : Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, chapitre XII, section 3, Caldero-Germoni.

Leçons : 101, 161, 183.

Théorème : Les groupes des déplacements et des isométries du tétraèdre régulier sont isomorphes respectivement à $\mathcal{A}_4$ et à $\mathcal{S}_4$.

Théorème : Les groupes des déplacements et des isométries du cube sont isomorphes respectivement à $\mathcal{S}_4$ et à $\mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque : Les groupes des déplacements et des isométries de l'octaèdre régulier sont ceux du cube (faire deux dessins en annexe).

Théorème (admis) : Les groupes des déplacements et des isométries du dodécaèdre régulier sont isomorphes respectivement à $\mathcal{A}_5$ et à $\mathcal{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque : Les groupes des déplacements et des isométries de l'icosaèdre régulier sont ceux du dodécaèdre régulier.

Preuve du 1er thm :

On commence par remarquer que les sommets A, B, C, D du tétraèdre régulier Δ sont ses points extrémaux, donc n'importe quelle isométrie de Δ conserve $\{A, B, C, D\}$ et $\varphi : \begin{cases} \text{Isom}(\Delta) & \rightarrow & \mathcal{S}_4 \\ g & \mapsto & \psi(g|_{\{A, B, C, D\}}) \end{cases}$ est un morphisme (où ψ est un isomorphisme entre $\mathcal{S}(\{A, B, C, D\})$ et $\mathcal{S}_4$).

Le noyau de φ est réduit à l'identité car (A, B, C, D) est un repère barycentrique de l'espace affine de dimension 3 (tout point s'exprime comme barycentre de ces quatre points et les isométries sont des applications affines). φ est donc injective.

Considérons deux sommets de Δ , sans perte de généralité A et B . La symétrie par rapport au plan médiateur du segment $[AB]$ est une isométrie de Δ qui échange A et B et fixe C et D . Pour cela il suffit de montrer que C et D appartiennent au plan médiateur de $[AB]$ et ceci découle du fait que Δ est un tétraèdre régulier (ses arêtes ont donc toutes même longueur). Les transpositions appartiennent donc à l'image de φ , or elles engendrent $\mathcal{S}_4$,

donc φ est surjective.

φ est donc un isomorphisme de $\text{Isom}(\Delta)$ sur $\mathcal{S}_4$.

De plus φ restreinte aux déplacements de Δ est d'image $\mathcal{A}_4$ (car les symétries par rapport à des plans médiateurs sont des antidéplacements et les transpositions sont des éléments de $\mathcal{S}_4 \setminus \mathcal{A}_4$ et il y a les mêmes règles de composition dans les deux cas) donc φ induit un isomorphisme de $\text{Isom}^+(\Delta)$ sur $\mathcal{A}_4$.

Preuve du 2e thm :

On commence par remarquer que n'importe quelle isométrie du cube Γ conserve l'ensemble des grandes diagonales du cube $\{D_1 = [AA'], D_2 = [BB'], D_3 = [CC'], D_4 = [DD']\}$ car le diamètre de Γ est égal à $\text{diam}(\Gamma) = AA' = BB' = CC' = DD'$ et pour tout autre $(M, N) \in \Gamma^2$ $\text{diam}(\Gamma) > MN$.

Ainsi $\varphi : \begin{cases} \text{Isom}(\Gamma) & \rightarrow & \mathcal{S}_4 \\ g & \mapsto & \psi(g|_{\{D_1, D_2, D_3, D_4\}}) \end{cases}$ est un morphisme (où ψ est un isomorphisme entre $\mathcal{S}(\{D_1, D_2, D_3, D_4\})$ et $\mathcal{S}_4$).

Soit $g \in \text{Isom}(\Gamma)$ tel que $\varphi(g)$ soit l'identité de $\mathcal{S}_4$. g est une isométrie qui envoie $[AA']$ dans $[AA']$ donc $g(A) \in \{A, A'\}$. Si $g(A) = A$ alors $g(B) = B$ (car de même $g(B) \in \{B, B'\}$ et la distance entre $g(A) = A$ et $g(B)$ doit être égale à la distance entre A et B), $g(B') = B'$ et de même pour les autres sommets, donc g est l'identité Id (car on peut extraire un repère barycentrique de $(A, B, C, D, A', B', C', D')$). Sinon, $g(A) = A'$, d'où $g(B) = B'$ (car de même $g(B) \in \{B, B'\}$ et la distance entre $g(A) = A'$ et $g(B)$ doit être égale à la distance entre A et B), $g(B') = B$ et de même on enlève le prime ou on l'ajoute pour les autres sommets, donc g est la symétrie s_O par rapport à l'isobarycentre O de Γ (idem que plus haut).

Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{Id, s_O\}$.

En particulier, le morphisme induit par φ de $\text{Isom}^+(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}_4$ est injectif, or il est surjectif car la rotation d'angle π et d'axe la droite passant par le milieu de deux arêtes "opposées" du cube (i.e. à distance maximale l'une de l'autre) a pour image une transposition et $\mathcal{S}_4$ est engendré par ses six transpositions, donc $\text{Isom}^+(\Gamma)$ est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.

De plus $\left\{ \begin{array}{ccc} \text{Isom}^+(\Gamma) & \rightarrow & \text{Isom}^-(\Gamma) \\ g & \mapsto & g \circ s_O \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{ccc} \text{Isom}^-(\Gamma) & \rightarrow & \text{Isom}^+(\Gamma) \\ g & \mapsto & g \circ s_O \end{array} \right.$ sont des bijections réciproques, or $\varphi(s_O)$ est égal à l'identité de $\mathcal{S}_4$, donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \text{Isom}(\Gamma) & \rightarrow & \mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g & \mapsto & \begin{cases} (\varphi(g), 0) & \text{si } g \in \text{Isom}^+(\Gamma) \\ (\varphi(g), 1) & \text{si } g \in \text{Isom}^-(\Gamma) \end{cases} \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme.}$$