

Continuité des racines d'une suite de polynômes.

Leçons : 105, 144, 203, 223.

Une référence possible est Analyse mathématique : la maîtrise de l'implicite de Testard.

Un lemme important à faire figurer dans le plan (et à savoir démontrer, ce n'est pas difficile) :

Lemme 1

Soit G un groupe fini qui opère sur un espace métrique (X, d) et tel que, pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in X$, on a $d(g.x, g.y) = d(x, y)$.

$\delta : \begin{cases} (X/G)^2 & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (O, O') & \mapsto \min_{x \in O, y \in O'} d(x, y) \end{cases}$ est une distance sur X/G et :

pour tous $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $x \in X$ $\delta(O_{x_n}, O_x) \rightarrow 0$ si et seulement s'il existe $(g_n) \in G^{\mathbb{N}}$ telle que $d(g_n.x_n, x) \rightarrow 0$.

Remarque 2

La topologie associée à δ est la topologie quotient sur X/G .

Le lemme et le théorème suivants constituent le développement :

Lemme 3

Soient $P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ $|a_i| \leq M$. Toute racine de P est bornée par $\max(1, Md)$.

Preuve : Si z est racine de P et vérifie $|z| \geq 1$ alors $|z^d| = \left| \sum_{i=0}^{d-1} a_i z^i \right| \leq dM|z|^{d-1}$ (car pour tout $0 \leq i \leq d-1$ $|z|^i \leq |z|^{d-1}$) d'où, en divisant par $|z|^{d-1}$, $|z| \leq Md$.

Théorème 4

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soient (P_n) une suite de polynômes unitaires à coefficients complexes de degré d et P un polynôme unitaire à coefficients complexes de degré d tels que (P_n) tend vers P coefficient par coefficient. Les racines $z_{1,n}, \dots, z_{d,n}$ de P_n tendent vers les racines $z_1, \dots, z_d$ de P dans le sens suivant : $\exists (\sigma_n) \in (\mathcal{S}_d)^{\mathbb{N}} \forall i \in \{1, \dots, d\} z_{\sigma_n(i),n} \rightarrow z_i$.

Preuve : Notons $P_n = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_{i,n} X^i$ et $P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$.

Munissons $\mathbb{C}^d$ de la distance d associée à $\|\cdot\|_\infty$. $\mathcal{S}_d$ est un groupe fini et $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_d \times \mathbb{C}^d & \rightarrow & \mathbb{C}^d \\ (\sigma, (x_1, \dots, x_d)) & \mapsto & (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(d)}) \end{array} \right.$ est une action de groupe telle que : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_d \forall x, y \in \mathbb{C}^d \ d(\sigma.x, \sigma.y) = d(x, y)$.

Le Lemme 1 nous donne δ et le fait que $\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^d, d) & \rightarrow & (\mathbb{C}^d/\mathcal{S}_d, \delta) \\ x & \mapsto & O_x \end{array} \right.$ est continue. De plus, d'après le Lemme 1, il suffit de montrer que $\pi(\mathbf{z}_n) \rightarrow \pi(\mathbf{z})$.

Remarquons que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ $(a_{i,n})$ converge donc est bornée.

Posons $M = \max_{0 \leq i \leq d-1} \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_{i,n}|$. D'après le Lemme 3, $\|\mathbf{z}_n\|_\infty \leq \max(1, Md)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\pi(\mathbf{z}_n) \in \pi(\overline{B}(0, \max(1, Md)))$ qui est compact par continuité de π . Il suffit donc de montrer que si $a = \pi(\mathbf{x})$ (par surjectivité de π) est une valeur d'adhérence de $(\pi(\mathbf{z}_n))$ alors $a = \pi(\mathbf{z})$.

Soient $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d$ tels que $\pi(\mathbf{z}_{\varphi(n)}) \rightarrow \pi(\mathbf{x})$. D'après le Lemme 1, il existe $(\sigma_n) \in (\mathcal{S}_d)^\mathbb{N}$ telle que $\sigma_n.\mathbf{z}_{\varphi(n)} \rightarrow \mathbf{x}$.

Les relations coefficients-racines nous donnent alors le fait que $P_{\varphi(n)}$ tend vers $\prod_{i=1}^d (X - x_i)$ coefficient par coefficient, d'où, par unicité de la limite, $P = \prod_{i=1}^d (X - x_i)$ d'où $\pi(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{z})$.

Remarque 5

On a montré au passage que $\mathbb{C}^d/\mathcal{S}_d$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^d$ (l'autre continuité étant donnée par les relations coefficients-racines). C'est remarquable car c'est assez rare que l'espace topologique quotient (cf. Remarque 2) soit homéomorphe à l'espace topologique de départ.