Quelques développements utiles

1 Groupe circulaire

Prérequis :
- Définition du birapport (dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et pour des points alignés de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$), invariance par le groupe projectif et formule dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
- Définition des cercles-droites dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
- Le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité.
- Définition du groupe circulaire et le fait que son action conserve les cercles-droites.

Le développement vise à démontrer le résultat suivant.

Théorème. *Toute bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui conserve les cercles-droites appartient au groupe circulaire.*

On démontre ce théorème en complétant la preuve du Théorème VI.7.11 de [Audin] (qui comporte quelques trous).

Lemme. *Quatre éléments a, b, c, d de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts deux à deux sont dits en division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$. Alors :*
- *Les éléments a, b, c, ∞ sont en division harmonique si et seulement si c est le milieu du segment $[ab]$.*
- *Pour tout $a \in \mathbb{C}$ différent de $0, 1$ et -1, $a, -a, a^2, 1$ sont en division harmonique.*
- *Étant donnés $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts, on peut construire d tel que a, b, c, d sont en division harmonique avec uniquement des droites et des cercles définis par a, b, c et des points auxiliaires éventuels.*

Démonstration.
D'après la formule du birapport, $[a, b, c, \infty] = (c - a)/(b - a)$ donc vaut -1 si et seulement si c est le milieu de $[ab]$, et pour tout $a \neq 0, -1, 1$:

$$[a, -a, a^2, 1] = \frac{(1 + a)/(1 - a)}{(a^2 + a)/(a^2 - a)} = -1.$$

Donnons maintenant la construction de la division harmonique.
- Si a, b, c ne sont pas alignés dans $\mathbb{R}^2$, ils sont cocycliques et on note (voir la Figure 14 p. 204) $\mathcal{C}$ l'unique cercle de $\mathbb{R}^2$ passant par a, b et c, T_a (resp. T_b) la tangente à $\mathcal{C}$ passant par a (resp. b), m l'unique point d'intersection de T_a et T_b dans $\mathbb{C}$, et d le point d'intersection de (mc) et $\mathcal{C}$. Montrons que $[a, b, c, d] = -1$.
  Après composition par une homographie, on envoie d à l'infini, a en a', b en b' et c en c'. Comme les homographies conservent les cercles-droites et d appartient à $\mathcal{C}$ mais pas à T_a ni T_b, $\mathcal{C}$ devient une droite D, T_a et T_b des cercles C_a et C_b tangents à D en a' et b' respectivement, et m est un des deux points d'intersection de C_a et C_b (l'autre étant l'image de ∞ par l'homographie). Or, c appartient à $(m\infty)$ et $\mathcal{C}$ donc c' appartient à la droite D' engendrée par $C_a \cap C_b$. Cette droite est en fait l'ensemble E des points M du plan tels que $O_aM^2 - r_a^2 = O_bM^2 - r_b^2$ où C_a (resp. C_b) est le cercle de centre O_a et de rayon r_a (resp. centre O_b et rayon r_b). En effet, E contient trivialement $C_a \cap C_b$, et l'égalité le définissant se ramène après développement à une égalité de la forme $\overrightarrow{O_aO_b} \cdot \overrightarrow{O_bM} = \lambda$ qui définit bien une droite, donc $D' = E$. Comme $\overrightarrow{O_aa'}$ et $\overrightarrow{a'c'}$ sont orthogonaux par tangence, et de même pour b', l'égalité définissant E appliquée à c' nous donne d'après le théorème de Pythagore $(a'c')^2 = (b'c')^2$ donc c' est le milieu de $a'b'$, ainsi $[a, b, c, d] = [a', b', c', \infty] = -1$.

- Si a, b, c sont alignés dans $\mathbb{R}^2$, on note D leur droite réelle commune et on choisit $m \notin D$, D' et D'' deux droites distinctes (et distinctes de D) passant par c. On note (voir Figure 15 p. 205) $\alpha = (am) \cap D'$, $\beta = (bm) \cap D'$, $\gamma = (bm) \cap D''$ et $\delta = (am) \cap D''$, et ε l'intersection des diagonales du quadrilatère $Q = \alpha\beta\gamma\delta$. Montrons que le point d'intersection d de $(m\varepsilon)$ et D réalise la division harmonique. Comme $d \in D$, $[a, b, c, d] = [a, b, c, d]_{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire le birapport de a, b, c, d vus comme quatre points distincts alignés dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).
  On peut donc composer par un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ pour envoyer (mc) à l'infini (les images des points par cette transformation étant notés avec une apostrophe), or par construction $(\alpha\beta) \cap (\gamma\delta) = \{c\}$ et $(\alpha\delta) \cap (\beta\gamma) = \{m\}$, donc le quadrilatère Q est envoyé sur un parallélogramme, avec ε' le milieu de ses deux diagonales, et $(\varepsilon' m')$ parallèle à $(\alpha'\delta')$ et $(\beta'\gamma')$ donc d' est le milieu de $[a'b']$, ainsi $[a, b, c, d] = [a', b', c', d'] = [a', b', d', \infty]^{-1} = (-1)^{-1} = -1$.

□

On peut maintenant prouver le Théorème.

Étape 1

Soit $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une telle bijection. Quitte à la composer avec une homographie, on peut et on va supposer que φ fixe $0, 1$ et ∞.

Comme φ fixe ∞, elle envoie les droites sur les droites et les cercles sur les cercles, et conserve la tangence (car c'est une bijection), donc par le lemme elle conserve la division harmonique.

Étape 2

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts. Comme a, b, c, ∞ sont en division harmonique si et seulement si c est le milieu de $[ab]$ par le lemme, φ conserve les milieux d'après l'étape 1 et donc

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}.$$

En appliquant ce résultat à $b = 0$, on en déduit que $\varphi(a/2) = \varphi(a)/2$ pour tout $a \in \mathbb{C}$ car $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ (le cas d'égalité de a et b vient de la formule précédente, le cas $a = 0$ de $\varphi(0) = 0$).

Pour tout $a \in \mathbb{C}$ différent de $1, 0, -1$, $[a, -a, a^2, 1] = -1$ d'après le lemme, et $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ pour tout $a \in \mathbb{C}$ par la formule précédente donc $[\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a^2), 1] = -1$ ainsi $\varphi(a)^2 = \varphi(a^2)$, ce qui est aussi vrai pour $a = 0, 1, -1$ comme on le vérifie immédiatement. En appliquant ceci à $(a + b)$, on en déduit que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pour tous a, b donc $\varphi_{|\mathbb{C}}$ est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$. De plus, il préserve $\mathbb{R}$ (en tant que droite de $\mathbb{C}$ passant par 0 et 1) et comme le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité, $\varphi_{|\mathbb{C}}$ est l'identité ou la conjugaison complexe, donc φ appartient au groupe circulaire.

Remarque.

- A l'oral, il vaut mieux définir tous les points et objets géométriques du lemme via les figures pour gagner beaucoup de temps, bien réfléchir à comment les tracer clairement. Pour ce qui est des prérequis, toutes les formules nécessaires et définitions du birapport et des cercles-droites doivent être placées dans le plan.
- J'ai ici pris le parti d'isoler le résultat technique sur la division harmonique pour que la structure de la preuve du théorème soit ensuite plus claire, mais on peut choisir d'ordonner différemment le développement.
- Il faut bien réaliser la différence entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans la preuve du lemme, et également comprendre pourquoi un cercle (ou une droite) est envoyé sur un cercle et pas une droite ou l'inverse dans les raisonnements ci-dessus.

Leçons compatibles :

127 Droite projective et birapport.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.

183 Utilisation des groupes en géométrie.