Théorème de Fejér

Mohamed NASSIRI

Référence :

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, niveau M1, Mohammed El Amrani , p.184 → 192

Recasage :

● ● ● ● ● 202 : Exemples de parties denses et applications.
●●●●● 209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
● ● ● ● ● 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
● ● ● ● ● 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.
● ● ● ● ○ 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Résumé :

Le théorème de Fejér nous donne un critère de convergence générale des séries de Fourier via les moyennes de Cesàro.

Prérequis :

Séries de Fourier - Convolution - Noyaux de Dirichlet et de Fejér

---

Théorème de Féjer :
En notant $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f)$, on a
1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_\infty = 0$$

2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [0, +\infty[$, alors

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_p = 0$$

Démonstration.
1) Soit $\delta \in]0, \pi]$. On considère

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)| \ ; \ |u - v| \leq \delta\}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| f(x) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\mathrm{d}t}_{=1} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))\underbrace{K_N(t)}_{\geq 0}\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |f(x) - f(x-t)| K_N(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t)\mathrm{d}t \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on a $|x-(x-t)| = |t| \leq \delta$, ainsi $|f(x) - f(x-t)| \leq \omega(\delta)$.
Dans la seconde intégrale, on va majoré (grossièrement) $|f(x) - f(x-t)|$ par $2||f||_\infty$. En revanche, pour $K_N(t)$, il faudra ruser un peu en se rappelant que K_N est un prologement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)}\right)^2$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}
(\delta \leq |t| \leq \pi) \ \Rightarrow\ (\sin(t/2) \geq \sin(\delta/2)) \ &\Rightarrow\ \left(K_N(t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\delta/2)}\right) \\
&\Rightarrow\ \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_N(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi N\sin^2(\delta/2)} \underbrace{\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\mathrm{d}t}_{\leq\int_{0\leq|t|\leq\pi}\mathrm{d}t=2\pi}\right) \\
&\Rightarrow\ \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_N(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{N\sin^2(\delta/2)}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à $(\dagger)$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |f(x) - f(x-t)| K_N(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \omega(\delta)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} K_N(t)\mathrm{d}t}_{\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\pi}K_N(t)\mathrm{d}t=1} + 2||f||_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_N(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \omega(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{N\sin^2(\delta/2)}
\end{aligned}$$

En passant au supremum sur les $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$||f - \sigma_N(f)||_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{N\sin^2(\delta/2)}$$

Puis en faisant $N \to +\infty$, on a donc

$$\lim_{N\to+\infty} ||f - \sigma_N(f)||_\infty \leq \omega(\delta)$$

Par ailleurs, comme f est continue sur le compact $[0, 2\pi]$, par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue, et ainsi, en faisant $\delta \to 0$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} ||f - \sigma_N(f)||_\infty = 0$$

2) En raisonnant comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}
||f - \sigma_N(f)||_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_N(f)(x)|^p \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))K_N(t)\mathrm{d}t\right|^p \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction convexe $u \to u^p$ et à la mesure $\mu(t) = \frac{K_N(t)}{2\pi}\mathrm{d}t$ (qui vérifie donc bien que $\mu([-\pi,\pi]) = \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{d}\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_N(t)}{2\pi}\mathrm{d}t = 1$), et ensuite le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}
||f - \sigma_N(f)||_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))K_N(t)\mathrm{d}t\right|^p \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))\mathrm{d}\mu(t)\right|^p \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p \mathrm{d}\mu(t)\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p K_N(t)\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\
&\underset{F.T.}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\left(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p \mathrm{d}x}_{:=g(-t)}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où l'on a posé $g(t) = ||f - \tau_{-t}f||_p^p$

> **Rappel :** Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Le *translatée de* f *par* a est la fonction définie par
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
||f - \sigma_N(f)||_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)g(-t)\mathrm{d}t \\
&= (g * K_N)(0) = \sigma_N(g)(0)
\end{aligned}$$

Comme $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, par le point 1), on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \sigma_N(g)(0) = g(0)$ et comme $g(0) = 0$, on en déduit donc que

$$\lim_{N\to+\infty} ||f - \sigma_N(f)||_p = 0$$

□

Remarques :

- **Noyaux de Dirichlet et de Fejér :**

En notant $e_n(x) = e^{inx}$, la fonction

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

est appelé *le noyau de Dirichlet d'ordre N.*
La fonction

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

est appelé *le noyau de Fejér d'ordre N.*
Alors 1)(i) D_N est une fonction paire, 2π-périodique, et vérifie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\mathrm{d}x = 1$$

(ii) D_N est un prologement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$$

(iii) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a

$$S_N(f) = f * D_N$$

2)(i) K_N est un prologement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)}\right)^2$$

(ii) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(f) = f * K_N$$

(iii) $(K_N)_{N\geq 1}$ est une approximation de l'unité de $L^1_{2\pi}$.

Démonstration :

$\square$

- **Deux inégalités :**

1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$$

2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [0, +\infty[$, alors

$$||\sigma_N(f)||_p \leq ||f||_p$$

Démonstration :

$\square$

- **Module de continuité :**
- **Etude rapide de $x \to \sin(x^2/2)$:**
- **Inégalité de Jensen :**

> **Inégalité de Jensen :**
> Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$ et $f : X \to]a, b[$ une fonction de $L^1(X)$. Alors, si φ est une fonction convexe sur $]a, b[$, on a
>
> $$\varphi\left(\int_X f \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) \mathrm{d}\mu$$

Démonstration :
Comme f est convexe, les pentes sont croissantes (*i.e.*) pour tous $a < s < t < u < b$, on a

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

Posons $t = \int_X f \mathrm{d}\mu$. Alors $a < t < b$. Par ailleurs, considérons

$$\alpha = \sup_{s \in]a,t[} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}$$

Par suite, on a donc

$$\alpha \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

Ainsi, pour tout $u \in]a, b[$, on a

$$\varphi(u) \geq \varphi(t) + \alpha(u - t)$$

En posant $u = f(x)$, on a donc

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \alpha(f(x) - t) \geq 0$$

Comme φ est continue, la fonction $\varphi \circ f$ est mesurable. En intégrant cette dernière inégalité (et en utilisant le fait que $\mu(X) = 1$ et que $t = \int_X f \mathrm{d}\mu$), on a

$$\int_X \varphi(f(x)) \mathrm{d}\mu - \mu(X)\varphi(t) - \alpha\left(\int_X f(x) \mathrm{d}\mu - \mu(X)t\right) \geq 0$$

$$\varphi\left(\int_X f \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) \mathrm{d}\mu$$

$\square$

- **Opérateur de translation :**

Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que le translatée de f par a est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

1) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, alors $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$ et $||\tau_a f||_p = ||f||_p$.
2) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\lim\limits_{a \to 0} ||\tau_a f - f||_p = 0$

Démonstration :
1) On a

$$\{x \in \mathbb{R} \ ; \ \tau_a f(x) \neq \tau_a g(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x-a) \neq g(x-a)\} = a + \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) \neq g(x)\}$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue λ par translation entraîne que

$$\lambda(\{\tau_a f \neq \tau_a g\}) = \lambda(\{f \neq g\})$$

On peut donc définir τ_a sur $L^p(\mathbb{R})$ car la classe de $\tau_a f$ modulo l'égalité presque partout ne dépend que de celle de f. Enfin, si $1 \leq p < +\infty$,

$$||\tau_a f||_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x-a)|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x = ||f||_p^p$$

Pour $p = +\infty$, on remarque que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \ \{|\tau_a f| > u\} = a + \{|f| > u\}$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue λ par translation entraîne que

$$||f||_\infty := \mathrm{supess}|f| = \inf\{M > 0 \ ; \ \lambda(|f| > M) = 0\} = \mathrm{supess}|\tau_a f| = ||\tau_a f||_\infty$$

2) Supposons que $f \in C_c(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions continues à support compact). Alors, par le théorème de Heine, f est uniformément continue et ainsi, on a

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta \, 0)(a \leq \eta) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, |f(x-a) - f(x)| \leq \epsilon)$$

Par suite, pour $a \leq \eta$, on a

$$\begin{aligned}
||\tau_a f - f||_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\
&= \int_{(a+\{f \neq 0\}) \cup \{f \neq 0\}} |f(x-a) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\
&\leq (\lambda(a + \{f \neq 0\}) + \lambda(\{f \neq 0\}))\epsilon^p \\
&\leq 2\lambda(\overline{\{f \neq 0\}}))\epsilon^p
\end{aligned}$$

Or, $\lambda(\overline{\{f \neq 0\}}))$ est fini puisque f est à support compact. Par conséquent,

$$a \leq \eta \quad \Rightarrow \quad ||\tau_a f - f||_p \leq \left(2\lambda(\overline{\{f \neq 0\}}))\right)^{1/p} \epsilon$$

Supposons maintenant $f \in L^p(\mathbb{R})$. Comme $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $C_c(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} ||f_n - f||_p = 0 \qquad (\dagger)$$

Alors

$$\begin{aligned}
||\tau_a f - f||_p &\leq ||\tau_a f - \tau_a f_n||_p + ||\tau_a f_n - f_n||_p + ||f_n - f||_p \\
&\leq 2||f_n - f||_p + ||\tau_a f_n - f_n||_p
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après (†), il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$||f_{n_\epsilon} - f||_p \leq \epsilon/4$$

et par ce qui précéde (puisque $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), il existe $\eta_\epsilon > 0$ tel que

$$||\tau_a f_{n_\epsilon} - f_{n_\epsilon}||_p \leq \epsilon/2 \text{ pour tout } |a| \leq \eta_\epsilon$$

Par conséquent,

$$||\tau_a f - f||_p \leq \epsilon \text{ pour tout } |a| \leq \eta_\epsilon$$

D'où le résultat.

□

Remarque : Grâce à l'égalité

$$||\tau_a f - \tau_b f||_p = ||\tau_b(\tau_{a-b} f - f)||_p = ||\tau_{a-b} f - f||_p$$

on déduit que si $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to L^p(\mathbb{R}) \\ a &\mapsto \tau_a f \end{aligned}$$

est uniformément continue.

Attention ! Pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on n'a pas $\lim\limits_{a\to 0} ||\tau_a f - f||_\infty = 0$. En effet, en considérant une fonction caractéristique $f = \chi_{[\alpha,\beta]}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$||\tau_a f - f||_\infty = 1 \underset{a \to 0}{\not\longrightarrow} 0$$