leçons :
209 : approximation par des polynômes
230 : séries de nb réels ou complexes
243 : convergence des séries entières
247 : exemples de problèmes d'interversion de limites.

Théorème Taubérien fort

15

Référence : Gourdon, Analyse page 289

Thm : Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
On suppose que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et que sa somme F vérifie $F(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$. Alors $\sum a_n$ converge vers 0.

preuve :

① On pose $\phi = \left\{ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i) } \forall x \in [0,1[\quad \sum a_n \varphi(x^n) \text{ converge} \\ \text{(ii) } \lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n\geq 0} a_n \varphi(x^n) = 0 \end{array} \right\}$

On remarque que ϕ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

② On pose $g = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$. Supposons que $g \in \phi$.

Alors $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n\geq 0} a_n g(x^n) = 0$

or $\forall x \in]0,1[\quad \sum\limits_{n\geq 0} a_n g(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{K(x)} a_n$ où $K(x) = E\left(-\frac{\log 2}{\log x}\right)$

K est surjective sur $[N, +\infty[$ pour N assez grand

D'où $\sum\limits_{n=0}^{K} a_n \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Nous allons donc montrer que $g \in \phi$.

③ <u>MQ si $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ est polynômiale nulle en 0, alors $p \in \phi$</u>

Par linéarité, il suffit de le prouver pour $p : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) $\forall x \in [0,1[\quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{n=0}^{N} a_n p(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (x^k)^n$

or $x^k \in [0,1[$ et $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence 1, d'où la convergence

(ii) $\forall x \in [0,1[\quad \sum\limits_{n\geq 0} a_n p(x^n) = F(x^k) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ car $\begin{cases} F \underset{1^-}{\longrightarrow} 0 \\ x^k \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1^- \end{cases}$

④ <u>MQ si $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ est polynomiale, alors $(1-x) \sum\limits_{n\geq 0} x^n q(x^n) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \int_0^1 q(t)dt$</u>

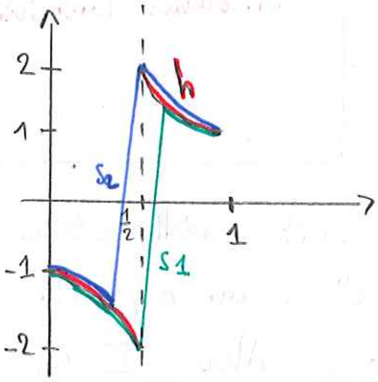
Par linéarité, il suffit de le prouver pour $q : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in]0,1[$. $\sum\limits_{n\geq 0} x^n q(x^n) = \sum\limits_{n\geq 0} (x^{k+1})^n = \frac{1}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{(1-x)(1+x+\dots+x^k)}$

D'où $(1-x) \sum\limits_{n\geq 0} x^n q(x^n) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{k+1} = \int_0^1 q(t)dt$

⑤ Soit $\varepsilon > 0$: MQ $\exists\ p_1, p_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ polynômiales tq $\begin{cases} p_1(0) = p_2(0) = 0 ,\ p_1(1) = p_2(1) = 1 \\ p_1 \leq g \leq p_2 \\ \int_0^1 q \leq 5\varepsilon \quad \text{où } q(x) = \dfrac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} \end{cases}$

On pose $h : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$



On peut trouver $s_1, s_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\begin{cases} s_1 \leq h \leq s_2 \\ \int_0^1 s_2 - s_1 \leq \varepsilon \end{cases}$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe $q_1, q_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ polynomiales telles que $\| q_1 - s_1 \|_\infty \leq \varepsilon$ et $\| q_2 - s_2 \|_\infty \leq \varepsilon$. On pose $u_1 = q_1 - \varepsilon$ et $u_2 = q_2 + \varepsilon$

On a $u_1 \leq s_1 \leq h \leq s_2 \leq u_2$

$\forall x \in [0,1]\ g(x) = x + x(1-x) h(x)$ donc on pose $\begin{cases} p_1(x) = x + x(1-x) u_1(x) \\ p_2(x) = x + x(1-x) u_2(x) \end{cases}$

On a le résultat voulu car $\underset{q \geq 0}{q = u_2 - u_1} = q_2 - q_1 + 2\varepsilon = (q_2 - s_2) + (s_2 - s_1) + (s_1 - q_1) + 2\varepsilon$

⑥ MQ $g \in \Phi$.

(i) On a vu en ② que $\forall x \in [0,1[$ $\sum a_n g(x^n)$ converge car $a_n g(x^n)$ est nul à partir d'un certain rang.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in [0,1[$

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n \geq 0} a_n p_1(x^n) \right| = \left| \sum_{n \geq 0} a_n \left(g(x^n) - p_1(x^n) \right) \right| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| \left(p_2(x^n) - p_1(x^n) \right)$$

$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\exists M > 0\ \forall n \geq 1\ |a_n| \leq \frac{M}{n}$ (c'est parce que c'est une suite que l'on peut choisir M assez grand pour que ce soit vrai pour $n \geq 1$)

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n \geq 0} a_n p_1(x^n) \right| \leq M \sum_{n \geq 0} \frac{x^n (1 - x^n)}{n} q(x^n) \leq M \sum_{n \geq 0} (1-x) x^n q(x^n)$$

car $1 - x^n = (1-x)(1 + x + \dots + x^{n-1}) \leq (1-x) n$

- q est un polynôme donc par ④ et ⑤ $\exists \lambda_1 \in]0,1[\ \forall x \in]\lambda_1, 1[\ \sum_{n \geq 0} (1-x) x^n q(x^n) \leq \frac{6\varepsilon}{M}$
- p_1 polynôme nul en 0 donc $p_1 \in \Phi$ par ③ donc $\exists \lambda_2 \in]0,1[\ \forall x \in]\lambda_2, 1[$ $\left| \sum_{n \geq 0} a_n p_1(x^n) \right| \leq \varepsilon$.

$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, $\forall x \in]\lambda, 1[\ \left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) \right| \leq 7\varepsilon$ □