VM

25/01/15

Lemme de Schwarz et biholomorphisme du disque

Amar - Matheron

Lemme de Schwarz

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leq 1$. Alors

(i) $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.

(ii) S'il existe $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ tel que $f = \lambda \, id_{\mathbb{D}}$.

On pose pour $a \in \mathbb{D}$, $\lambda \in \mathbb{U}$, $\varphi_{a,\lambda} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \lambda \dfrac{a - z}{1 - \bar{a} z}$.

Théorème :

L'ensemble $\mathcal{A}$ des automorphismes biholomorphes de $\mathbb{D}$ est $\{ \varphi_{a,\lambda} \mid a \in \mathbb{D}, \lambda \in \mathbb{U} \}$.

---

démo du lemme : (i) D'après le principe du prolongement analytique, il existe $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z) = z g(z)$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

Soit $r \in]0, 1[$. Soit z de module r.

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}.$$

D'après le principe du maximum, $\sup_{|z| \leq r} |g(z)| \leq \dfrac{1}{r}$.

Soit $z \in \mathbb{D}$. Alors pour tout $r \geq |z|$, $|g(z)| \leq \dfrac{1}{r}$.

Quand $r \to 1^-$, on obtient $|g(z)| \leq 1$,

donc $|f(z)| \leq |z|$.

De plus, $f'(z) = g(z) + z g'(z)$ donc $f'(0) = g(0)$: $|f'(0)| \leq 1$.

(ii) Soit $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Alors $|g(z_0)| = 1$. Comme $|g| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$, d'après le principe du maximum, g est constant sur $\mathbb{D}$.

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ tel que $g \equiv \lambda$ et $f \equiv \lambda \, id_{\mathbb{D}}$.

Si $|f'(0)| = 1$, alors $|g'(0)| = 1$ et on conclut de la même manière.

---

démo du théorème :

Soit $a \in \mathbb{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{U}$. On pose $\varphi_a : \begin{array}{l} \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ z \mapsto \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z} \end{array}$.

φ_a est bien définie : $\forall z \in \mathbb{D}$, $1 - \bar{a}z \neq 0$ car $\left|\frac{1}{\bar{a}}\right| > 1$.

De plus, $1 - \left|\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \dfrac{1 - 2Re(\bar{a}z) + |a|^2|z|^2 - |a|^2 - |z|^2 + 2Re(\bar{a}z)}{|1-\bar{a}z|^2}$

$= \dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} > 0$.

φ_a est holomorphe et $\varphi_a \circ \varphi_a = id_{\mathbb{D}}$.

Donc $\varphi_a \in \mathcal{A}$.

De plus, $r_\lambda : \begin{array}{l} \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ z \mapsto \lambda z \end{array}$ appartient à $\mathcal{A}$,

car $r_\lambda \circ r_{\bar{\lambda}} = id_{\mathbb{D}}$.

Donc $\varphi_{a,\lambda} = r_\lambda \circ \varphi_a \in \mathcal{A}$.

Réciproquement, soit $\psi \in \mathcal{A}$. Soit $a = \psi^{-1}(0) \in \mathbb{D}$.

Soit $\tilde{\psi} = \psi \circ \varphi_a$.

Alors $\tilde{\psi}(0) = \psi \circ \varphi_a(0) = \psi(a) = 0$.

$\tilde{\psi}$ est holomorphe, et $\tilde{\psi}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, donc par le lemme de Schwarz, $\forall z \in \mathbb{D}, |\tilde{\psi}(z)| \leq |z|$.

De plus, $\tilde{\psi}^{-1}(0) = 0$, $\tilde{\psi}^{-1}$ est holomorphe et $\tilde{\psi}^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, donc on a aussi $\forall z \in \mathbb{D}$, $|z| \leq |\tilde{\psi}(z)|$.

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{D}$, $|\tilde{\psi}(z)| = |z|$, et par le (ii) du lemme de Schwarz, $\tilde{\psi} = \lambda\, id_{\mathbb{D}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{U}$.

Donc $\tilde{\psi} = r_\lambda$ et $\psi = r_\lambda \circ \varphi_a = \varphi_{a,\lambda}$.