Burnside + double TRANS + table de caractères de $\mathcal{S}_4$

Dans tout le développement, G est un groupe et X un ensemble, tous deux supposés finis.

Formule de Burnside : *Si $G \circlearrowright X$, le nombre d'orbites vaut* $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$.

$Fix(g) = \{x \in X \ ; \ g\cdot x = x\}$

Preuve de la formule : Notons R l'ensemble $\{(g,x) \in G\times X \ ; \ g\cdot x = x\}$.

D'une part $|R| = \sum_{g\in G}|Fix(g)|$.

D'autre part, $|R| = \sum_{x\in X}|Stab_x| = |G|\sum_{x\in X}\frac{1}{|O_x|} = |G|\sum_{O orbite}\sum_{x\in O}\frac{1}{|O|}$

Or $\sum_{x\in O}\frac{1}{|O|} = 1$ d'où $|R| = |G|\sum_{O orbite} 1$.

En égalant les deux valeurs de $|R|$, on obtient la formule de Burnside.

□

Représentation par permutation : On suppose que G agit sur X de manière doublement transitive (c'est-à-dire que si x_1, x_2, y_1, y_2 sont quatre éléments de X avec $x_1 \neq x_2$ et $y_1 \neq y_2$ il existe $g \in G$ tel que $g(x_1) = y_1$ et $g(x_2) = y_2$). Soit V un $\mathbf{C}$-ev de dimension $|X|$ dont on indexe une base par les éléments de X : $(e_x)_{x\in X}$.

La représentation par permutation est définie par :

$$\forall g \in G \ \forall x \in X \ \rho(g)(e_x) = e_{g\cdot x}$$

La vision matricielle montre immédiatement que le caractère χ vaut $\chi(g) = |Fix(g)|$ pour tout $g \in G$.

Remarquons aussi que $d = \sum_{x\in X} e_x$ est invariante sous G : $\rho(g)(d) = d \ \forall g \in G$. En effet $\sum_{x\in X} e_{g\cdot x} = \sum_{x\in X} e_x$ puisque $g_1\cdot x = g_2 \cdot x \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in Stab_x = \{e\}$ (l'action est transitive) $\Rightarrow g_1 = g_2$. On a donc simplement permuté les éléments de la somme : on retombe sur d.

$< d >$ est donc une sous-représentation de caractère 1.

Le théorème de Maschke fournit un supplémentaire V_0 G-stable : $V =< d > \oplus V_0$

Par additivité des caractères, on obtient :

$$\boxed{\forall g \in G, \ \chi_{V_0}(g) = |Fix(g)| - 1.}$$

Théorème : V_0 *est irréductible.*

Démonstration : Les caractères irréductibles formant une base de l'espace des fonctions centrales (fonctions $G \to \mathbf{C}$ constantes sur les classes de conjugaison), la théorie des caractères nous dit qu'il suffit de montrer que $< \chi_{V_0}, \chi_{V_0} >= 1$.

$< \chi_{V_0}, \chi_{V_0} >= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_0}(g)^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(|Fix(g)|-1)^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|^2 - 2\times\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)| + 1 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|^2 - 1$ (on a utilisé la formule de Burnside pour le terme du milieu, l'action est transitive, il n'y a qu'une orbite).

Reste à évaluer $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|^2$. C'est là qu'intervient la double transitivité.

Considérons l'action naturelle $G \circlearrowright X \times X$ définie par $g\cdot(x,y) = (g\cdot x, g\cdot y)$. Cette action possède deux orbites : l'orbite *diagonale* $\{(x,x) \in X\times X\}$ et l'orbite complémentaire $\{(x,y) \in X\times X, \ x \neq y\}$. Cela résulte immédiatement de la définition de la double-transitivité.

La formule de Burnside donne donc : $2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\widetilde{Fix}(g)|$ où $\widetilde{Fix}(g) = \{(x,y) \in X \times X,\ g \cdot (x,y) = (x,y)\}$.

Or $\widetilde{Fix}(g) = \{(x,y) \in X \times X,\ g \cdot x = x,\ g \cdot y = y\} = Fix(g) \times Fix(g)$.

Ainsi $|\widetilde{Fix}(g)| = |Fix(g)|^2$. On reconnaît le terme qu'il nous fallait évaluer : $2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\widetilde{Fix}(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|^2$. C'est ainsi que :

$$\boxed{< \chi_{V_0}, \chi_{V_0} >= 2 - 1 = 1.}$$

□

Application : Table de caractères de $\mathcal{S}_4$

$\mathcal{S}_4 \circlearrowleft \{1,2,3,4\}$ de façon doublement transitive (en fait $\mathcal{S}_n$ agit sur $\{1,\dots,n\}$ de façon n-transitive par le principe de conjugaison, et $\mathcal{A}_n$ agit sur ce même ensemble de manière $n-2$-transitive - il faut en effet éventuellement composer avec une transposition, cf. Perrin) donc χ_{V_0} est ici irréductible.
$\varepsilon\chi_{V_0}$ est un autre caractère irréductible (le produit d'une représentation quelconque avec une représentation de degré 1 est encore une représentation - car les scalaires commutent avec les matrices ; pour l'irréductibilité, il suffit d'écrire la définition de $< \varepsilon\chi_{V_0}, \varepsilon\chi_{V_0} >$ et de se souvenir ε vaut ± 1). Le dernier caractère s'obtient par orthogonalité des caractères.

$\mathcal{S}_4$	e	$(\cdot\cdot)$	$(\cdot\cdot\cdot)$	$(\cdot\cdot\cdot\cdot)$	$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$
$\bullet$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_{V_0}	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon\chi_{V_0}$	3	-1	0	1	-1
	2	0	-1	0	2

Remarques.

- Référence : *NH2G2*.
- Ce développement se présente bien en 15 minutes, il faut présenter succinctement la représentation par permutation, et faire rapidement la table. il convient de s'attarder surtout sur le théorème.
- À savoir : 1) la table du groupe symétrique est réelle : cela vient de la formule $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ et du fait que l'inverse d'une permutation appartient à la même classe de conjugaison.
2) Le nombre de représentation de degré 1 est l'indice du groupe dérivé : Le groupe symétrique possède donc toujours 2 représentations de degré 1 pour $n \geq 2$. Le groupe alterné possède une unique représentation de degré 1 (la triviale) pour $n \geq 5$. Attention à $\mathcal{A}_4$! $D(\mathcal{A}_4) = V_4$ le Viergruppe constitué des doubles-transpositions. $\mathcal{A}_4$ possède donc $12/4 = 3$ trois représentations de degré 1 : ce sont celles de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ puisque $\mathcal{A}_4/V_4 \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. La table de $\mathcal{A}_4$ se construit à partir de celle de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, et le dernier caractère s'obtient par orthogonalité ou par la représentation du développement puisque $\mathcal{A}_4$ agit sur $\{1,2,3,4\}$ de manière $4-2=2$ transitive !
- Recasages : 101, 104, 105, 107, 190.