VM
23/12/14

Application du Vandermonde

Rappel : déterminant de Vandermonde $V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i).$$

Théorème : Soient $P_1,\dots,P_n \in \mathbb{R}_m[X]$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$.

On suppose $n > m$.

Alors $D_n = D_n(P_1,\dots,P_n,a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} P_1(a_1) & \cdots & P_1(a_n) \\ P_2(a_1) & \cdots & P_2(a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(a_1) & \cdots & P_n(a_n) \end{vmatrix}$

$$= V(a_1,\dots,a_n) \det(P_1,\dots,P_n)$$

où det est le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Application : Calcul de $\begin{vmatrix} 1^m & \cdots & n^m \\ 2^m & \cdots & (n+1)^m \\ \vdots & & \vdots \\ n^m & \cdots & (2n-1)^m \end{vmatrix}$ pour $n > m$.

· Si $(P_1,\dots,P_n)$ est liée, alors D_n est nul. Donc si $n > \dim \mathbb{R}_m[X] = m+1$, le déterminant est nul, donc on peut supposer $n = m+1$.

· Si deux des $(a_i)_i$ sont égaux, alors le déterminant est nul.

On suppose dorénavant les $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ deux à deux distincts.

· Supposons $P_1,\dots,P_n$ fixés et calculons $D_n = D_n(a_1,\dots,a_n)$.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, il existe D_k tq $D_n(a_1,\dots,a_n) = D_k(a_1,\dots,a_k) \prod_{j=k+1}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i)$

Pour $k = n$, il n'y a rien à faire.

Supposons le résultat vrai pour $k \leq n$ et montrons-le pour $k-1$.

$P(X) = D_n(a_1,\dots,a_{k-1},X,a_{k+1},\dots,a_n) = \begin{vmatrix} P_1(a_1) & \cdots & P_1(X) & \cdots & P_1(a_n) \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_n(a_1) & \cdots & P_n(X) & \cdots & P_n(a_n) \end{vmatrix} \in \mathbb{R}(X)$.

P est un polynôme réel de degré $\leq m = n-1$, et a $(n-1)$ racines distinctes : $a_1, \dots, \widehat{a_k}, \dots, a_n$

Donc $$D(a_1, \dots, \overset{X}{\widehat{a_k}}, \dots, a_n) = \tilde{D}(a_1, \dots, \widehat{a_k}, \dots, a_n) \prod_{j=k+1}^{n} (a_j - X) \prod_{i=1}^{k-1} (X - a_i)$$

$$\shortparallel$$

$$D_k(a_1, \dots, a_{k-1}, X) \prod_{j=k+1}^{n} \left(\prod_{\substack{i \neq k \\ 1 \leq i \leq j-1}} (a_j - a_i) \right) (a_j - X)$$

il existe D_{k-1} tq

Donc $$D_k(a_1, \dots, a_{k-1}, X) = D_{k-1}(a_1, \dots, a_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} (X - a_i)$$

Donc en évaluant en a_k,

$$D_n = D_{k-1}(a_1, \dots, a_{k-1}) \prod_{j=k}^{n} \prod_{i=1}^{k-1} (a_j - a_i).$$ La récurrence est validée.

Ainsi, $D(P_1, \dots, P_n, a_1, \dots, a_n) = S(P_1, \dots, P_n) V(a_1, \dots, a_n)$.

$S(P_1, \dots, P_n)$ est une forme n-linéaire alternée, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $D_n = k \, V(a_1, \dots, a_n) \det(P_1, \dots, P_n)$.

En choisissant pour $(P_1, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on obtient $D_n = V(a_1, \dots, a_n)$, donc $k = 1$ et

$$D_n = V(a_1, \dots, a_n) \det(P_1, \dots, P_n).$$

Application : On choisit $a_i = i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $P_j(X) = (X + j - 1)^m$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Alors $$\begin{vmatrix} 1^m & 2^m & \dots & n^m \\ 2^m & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ n^m & \dots & \dots & (2n-1)^m \end{vmatrix} = D_n(P_1, \dots, P_n, a_1, \dots, a_n)$$
$$= V(a_1, \dots, a_n) \det(P_1, \dots, P_n).$$

- $V(1, \dots, n) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j - i) = \prod_{j=2}^{n} (j-1)! = \prod_{j=1}^{n} j!$
- $P_j(X) = (X + j - 1)^m = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (j-1)^{n-1-i} X^i$ si $m = n-1$

(Si $m < n-1$, le déterminant est nul)

$$\det(P_1, \dots, P_n) = \prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2^{n-1} & \dots & (n-1)^{n-1} \\ | & | & | & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & — & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\wedge}_{V(0, 1, \dots, n-1)}$$

Donc $$|—| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!^n = \begin{cases} (n-1)!^n & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1 \bmod 4 \\ -(n-1)!^n & \text{si } n = 2 \text{ ou } 3 \bmod 4. \end{cases}$$