Solutions développables en série entière de l'équation de Bessel

Contexte : Les séries développables en série entière permettent de résoudre des équations différentielles. L'idée est d'obtenir une formule de récurrence sur les coefficients en insérant une éventuelle solution dans l'équation. On vérifie par la suite que le rayon de convergence est non nul.

On considère ici l'équation différentielle de Bessel (E) : $xy'' + y' + xy = 0$. Cette équation de la physique intervient dans des problèmes ondulatoires ou dans le pendule de Bessel. Pour ce dernier problème il s'agit d'un pendule simple oscillant dont on suppose que la longueur du fil peut varier. L'angle vérifie alors une équation différentielle de Bessel.

Théorème 1. *Il existe une unique solution f de l'équation de Bessel développable en série entière en 0 et valant 1 en 0. C'est :*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^n$$

Soit g une solution sur $]0, \alpha[$ avec $\alpha > 0$ telle que f et g soient linéairement indépendants. Alors g est non bornée. On en déduit que :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\theta)) d\theta$$

Démonstration. Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une solution de (E) de rayon de convergence non nul telle que $f(0) = 1$. On calcule ses dérivées : $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$. D'où $xf''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n+1) a_{n+1} x^n$. D'où en identifiant les coefficients d'ordre n, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

Donc $a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2} a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Or $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = 0$. On en déduit par récurrence que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 0$ et

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)^2 \times \cdots \times 2^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}$$

Synthèse. On pose $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_{2n} x^{2n}$ avec $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}$. Calculons son rayon en prenant soin de prendre en compte qu'il s'agit d'une série dont les coefficients s'annulent. D'après la règle de Hadamard, le rayon est la racine de celui de $b_n = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}$. On calcule celui ci par la règle de Cauchy :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^n(n!)^2}{4^{n+1}((n+1)!)^2} = \frac{1}{4(n+1)^2} \to 0$$

Donc le rayon de f est infini. De plus les coefficients de f vérifient la relation de récurrence précédente donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.

□

Démontrons maintenant la propriété sur les solutions de (E).

Démonstration. Soit g une solution de (E) sur $]0,\alpha[$ avec $\alpha > 0$ telle que g et f soient linéairement indépendants. Montrons que g n'est pas bornée. Supposons donc le contraire. Pour faire le lien entre les deux solutions on utilise le wronskien. On pose : $W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$. On a pas encore utilisé que f et g sont solutions de (E). On dérive donc W.

$$W' = fg'' + f'g' - f'g' - f''g = \frac{1}{x}(f(-g' - xg) - g(-f' - xf)) = \frac{-W}{x}$$

Donc $W(x) = A/x$ avec $A \neq 0$ car f et g sont non colinéaires. Donc $xfg' - xf'g = A$. Or g est prolongeable par continuité en 0 (car bornée). Donc $xfg' \to A$. On en déduit :

$$g'(x) \sim A/x$$

Soit $x_0 \in]0,\alpha[$. On peut intégrer l'équivalent car $\int_{x_0}^x \frac{dt}{t} \to \infty$ en 0. Alors : $\int_{x_0}^x g' = g(x) - g(x_0) \sim A\ln(x) \to \infty$. C'est impossible. Donc g est bornée.

□

De là on peut donner une autre formule pour f.

Démonstration. On pose $g(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))d\theta$. On veut dériver sous le signe intégral. Or $h(x,\theta) = \cos(x\sin(\theta))$ est C^2 sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$. Donc g est C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi - \sin(\theta)\sin(x\sin(\theta))d\theta$$

$$g''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi - \sin^2(\theta)\cos(x\sin(\theta))d\theta$$

D'où :

$$xg''(x) + g'(x) + xg(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos^2(\theta)\cos(x\sin(\theta)) - \sin(\theta)\sin(x\sin(\theta))d\theta$$

Or on a une primitive (!!) de cette fonction (en θ) qui est $\cos(\theta)\sin(x\sin(\theta)$ et qui a la même valeur en 0 et π. Donc g est solution de (E), g est bornée et $g(0) = 1$. Donc $g = f$.

□

Références :

— FGN, Oraux X-ENS Analyse 4 p.101

Remarques : Développement un peu long, mais on peut zapper la dernière partie.

Leçons concernées :

— 220 - Équations différentielles $x' = f(t,x)$.
— 221 - Équations différentielles linéaires.
— (239) - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.
— 244 - Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques.