# Birapport et homographies

**Définition 1.** *Soit $A, B, C, D$ quatre points différents de $P^1(K)$. On définit le birapport de $A, B, C$ et $D$ par :*

$$[A, B, C, D] = [u_A, u_B, u_C, u_D] = \frac{|u_C, u_A|}{|u_C, u_B|} / \frac{|u_D, u_A|}{|u_D, u_B|}$$

*où $u_A, u_B, u_C, u_D$ sont respectivement des vecteurs directeurs de $A, B, C, D$. $|u_C, u_A|$ désigne le déterminant des deux vecteurs.*

**Proposition 2.** *Soit $A, B, C, D \in P^1(K)$ différents. Il existe une unique homographie $h$ telle que $h(A) = [1, 0] = \infty$, $h(B) = [0, 1] = 0$ et $h(C) = [1, 1] = 1$. Alors $[[A, B, C, D], 1] = h(D)$.*

**Théorème 3.** *Soit $f : P^1(K) \to P^1(K)$ une bijection. Alors $f$ est une homographie ssi $f$ conserve le birapport.*

---

Commençons par prouver la proposition.

*Démonstration.* Soit $A, B, C, D \in P^1(K)$ différents. On note $u_A, u_B, u_C, u_D$ des vecteurs directeurs. Comme $A \neq B$, alors $(u_A, u_B)$ est une base de $K^2$ (car non colinéaires). Donc il existe $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in K^*$ (non nuls sinon il y a colinéarité) telles que :

$$\begin{cases} u_C = \lambda u_A + \mu u_B \\ u_D = \lambda' u_A + \mu' u_B \end{cases}$$

Alors :

$$[A, B, C, D] = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \mu & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & 1 \end{vmatrix}} / \frac{\begin{vmatrix} \lambda' & 1 \\ \mu' & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda' & 0 \\ \mu' & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\mu}{\lambda} / \frac{-\mu'}{\lambda'} = \frac{\mu\lambda'}{\lambda\mu'}$$

$A, B, C$ est un repère projectif tout comme $\infty, 0, 1$. Donc il existe une homographie telle que $h(A) = \infty, h(B) = 0, h(C) = 1$.

On va calculer de <u>deux manières différentes $[h(A), h(B), h(C), h(D)]$</u>.

On note $\bar{h}$ l'isomorphisme de $K^2$ associé à $h$. Alors $\bar{h}(u_A)$ et $\bar{h}(u_B)$ forment une base de $K^2$. De plus $\bar{h}(u_A)$, $\bar{h}(u_B)$, $\bar{h}(u_C)$, $\bar{h}(u_D)$ sont des vecteurs directeurs de $h(A), h(B), h(C), h(D)$. Donc :

$$[h(A), h(B), h(C), h(D)] = [\bar{h}(u_A), \bar{h}(u_B), \bar{h}(u_C), \bar{h}(u_D)]$$

$$= [\bar{h}(u_A), \bar{h}(u_B), \lambda\bar{h}(u_A) + \mu\bar{h}(u_B), \lambda'\bar{h}(u_A) + \mu'\bar{h}(u_B)] = \frac{\mu\lambda'}{\lambda\mu'} = [A, B, C, D]$$

On pose $h(D) = [x, 1]$ (car $h(D)$ n'est pas colinéaire à $(1, 0)$). Alors :

$$[h(A), h(B), h(C), h(D)] = [(1, 0), (0, 1), (1, 1), (x, 1)] = [(1, 0), (0, 1), (1, 0)+(1, 1), x(1, 0)+(0, 1)] = x$$

Donc $h(D) = [[A, B, C, D], 1]$

□

On peut maintenant montrer le théorème en faisant l'abus de notation $[A, B, C, D] = h(D)$.

*Démonstration.* • Soit $f$ une homographie. Soit $A, B, C, D \in P^1(K)$ différents. On note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. On pose $g$ l'homographie telle que $g(A') = \infty$, $g(B') = 0$, $g(C') = 1$. Donc par la proposition, $[A', B', C', D'] = g(D')$. Or $g \circ f(A) = \infty$, $g \circ f(B) = 0$ et $g \circ f(C) = 1$. Donc $[A, B, C, D] = g(f(D)) = g(D') = [A', B', C', D']$. Donc $g$ conserve le birapport.

• Soit $f : P^1(K) \to P^1(K)$ une bijection qui conserve le birapport. On pose $A' = f(\infty)$, $B' = f(0)$ et $C' = f(1)$. Par bijectivité, $A', B', C'$ est encore un repère projectif. Donc il existe $h$ une homographie telle que $h(A') = \infty$, $h(B') = 0$ et $h(C') = 1$. On pose $g = h \circ f$. Soit $M \in P^1(K)$. Comme $h$ conserve le birapport (par le sens direct du théorème), alors $g$ conserve le birapport. Donc

$$[\infty, 0, 1, M] = [h(A'), h(B'), h(C'), g(M)] = [\infty, 0, 1, g(M)]$$

Donc $M = g(M)$ pour tout $M$. Donc $g = id$. Donc $f = h^{-1}$ est une homographie.

□

---

**Références :** La démonstration de la propriété est artisanale. Dans Audin, le birapport est défini par l'image d'une homographie alors que dans Lagaillerie, il est défini comme ici.

— Audin - Géométrie p.196 (pour le premier sens de l'équivalence)

— Ladegaillerie - Géométrie p.148 (pour le second)

**Leçons concernées :**

— 127 - Droite projective et birapport

— 183 - Utilisation des groupes en géométrie

**Remarques :** Aucune recasabilité certes, mais ce développement permet de travailler les différentes définitions du birapport et les droites projectives.