Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 1 et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = P(X = k)$ et $m = E[X] = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} kp_k < \infty$

Soit $(X_i^j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et enfin soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} X_i^n \end{cases}$$

Principe

Le processus de Galton-Watson consiste à modéliser la taille d'une population. (Z_n) symbolise le nombre d'individus de la n-ième génération et X_i^n est le nombre de descendants de l'individu i de la n-ième génération (les individus considérés génèrent des enfants seuls, par exemple on peut décider de ne compter que les femmes et leurs filles etc.)

Le but est d'étudier (Z_n) et d'essayer de calculer la probabilité qu'un jour, la population s'éteigne, c'est à dire $P(\exists n \in \mathbb{N};\, Z_n = 0)$

En particulier, on étudie la descendance d'un seul individu, c'est pour cette raison que l'on initialise (Z_n) à $Z_0 = 1$.

Dans la suite, c'est en particulier la convexité de la fonction génératrice de X qui nous permettra d'établir des résultats sur la probabilité d'extinction recherchée.

Remarque

Le nombre de descendants d'un individu i de la n-ième génération de dépend pas du nombre d'individu de la n-ième génération, il est donc clair que les variables Z_n et X_i^n sont indépendantes pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Notations et remarques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi_n = P(Z_n = 0)$ et $\pi_\infty = P(\exists n \in \mathbb{N}^*;\, Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction.

Il est clair que $Z_n = 0 \Longrightarrow Z_{n+1} = 0$, donc la suite d'évènement $\{Z_n = 0\}$ est croissante et $\pi_\infty = P\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$

$(\star)$ Si $p_0 = 0$, alors $Z_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\pi_\infty = 0$ (si la probabilité qu'il n'y ait pas de descendants est nulle, alors il y aura toujours des descendants et donc jamais extinction)

$(\star)$ Si $p_0 = 1$, alors $Z_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\pi_\infty = 1$ (si la probabilité d'avoir des descendants est nulle, alors le seul individu considéré n'aura aucun descendant donc la population s'éteint dès la première génération)

On considèrera donc dans toute la suite que $p_0 \in]0,1[$.

Proposition

Soit $G : s \in [0,1] \longmapsto E\left[s^X\right] = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$ la fonction génératrice de X. Alors :

(1) G est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$

(2) (a) G est strictement croissante sur $]0,1[$

(b) G est convexe sur $]0,1[$

(c) G est strictement convexe sur $]0,1[\Longleftrightarrow p_0 + p_1 < 1$

Preuve. Pour (1), il suffit de remarquer que la série dérivée converge en 1 car X admet un moment d'ordre 1.

Pour (2), remarquons que la série entière $\sum p_k s^k$ a un rayon de convergence supérieur à 1 car $\sum p_k$ converge (vers 1).

Donc $\forall s \in [0,1[, G'(s) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kp_k s^{k-1}$ et $G''(s) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p_k s^{k-2}$

Comme $p_0 < 1$, alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{k_0} > 0$ car $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

(a) : $\forall s \in]0,1[, G'(s) \geq k_0 p_{k_0} s^{k_0-1} > 0$ donc G est strictement croissante sur $]0,1[$.

(b) : $\forall s \in]0,1[, G''(s) \geq 0$ donc G est convexe sur $]0,1[$.

(c) : Si $p_0 + p_1 = 1$, alors G est affine et n'est donc pas strictement convexe.

Si $p_0 + p_1 < 1$ alors on peut choisir $k_0 \geq 2$ et donc $\forall s \in]0,1[, G''(s) \geq k_0(k_0-1)p_{k_0} s^{k_0-2} > 0$ donc G est strictement convexe.

□

Proposition

Soit $G_n : s \longmapsto E\left[s^{Z_n}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_n = k)s^k$ *la série génératrice de* Z_n.

De même que pour G, G_n *est bien définie sur* $[0,1]$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G \circ G \circ ... \circ G = G^n$ *sur* $[0,1]$.

Preuve. On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

• Si $n = 1, G_1(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)s^k$.

Mais Z_1 est le nombre de descendant du seul individu de la génération 0. Donc Z_1 est de même loi que X (en effet $Z_1 = X_1^0$).

Donc G_1 est la série génératrice de X, donc $G_1 = G^1 = G$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $G_n = G^n$. Soit $s \in [0,1]$.

$$G_{n+1}(s) = E\left[s^{Z_{n+1}}\right] = E\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_i^n}\right] = E\left[\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{Z_n=j} \prod_{i=1}^{j} s^{X_i^n}\right]$$

$= \sum_{j=0}^{+\infty} E\left[\mathbb{1}_{Z_n=j} \prod_{i=1}^{j} s^{X_i^n}\right] = \sum_{j=0}^{+\infty} E\left[\mathbb{1}_{Z_n=j}\right] \prod_{i=1}^{j} E\left[s^{X_i^n}\right]$ par le théorème de Fubini et l'indépendance de Z_n avec les X_i^n.

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} P(Z_n = j)E\left[s^X\right]^j = \sum_{j=0}^{+\infty} P(Z_n = j)G(s)^j = G_n(G(s))$$

$= G^n(G(s))$ par hypothèse de récurrence.

$= G^{n+1}(s)$

Ce qui achève la récurrence.

□

Proposition

La probabilité d'extinction π_∞ *est le plus petit point fixe de* G *sur* $[0,1]$.

Preuve. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in [0,1], G_{n+1}(s) = G(G_n(s))$

En particulier $G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) = G(\pi_n)$ car $G_n(0) = P(Z_n = 0) = \pi_n$

Et $G_{n+1}(0) = P(Z_{n+1} = 0) = \pi_{n+1}$.

Donc $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.

Comme G est continue sur $[0,1]$, alors on peut passer à la limite et ainsi $G(\pi_\infty) = \pi_\infty$.

Donc π_∞ est un point fixe de G sur $[0,1]$. Il reste à montrer que c'est le plus petit.

Soit u un point fixe de G sur $[0,1]$. Montrons alors que $\pi_n \leq u \, \forall n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

• Si $n = 1, \pi_1 = G(\pi_0) = G(P(Z_0 = 0)) = G(0) \leq G(u)$ car G croissante et $u \geq 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\pi_n \leq u$.

Alors $\underbrace{G(\pi_n)}_{=\pi_{n+1}} \leq \underbrace{G(u)}_{=u}$ car G est croissante.

Et ainsi $\pi_{n+1} \leq u$

Ce qui achève donc la récurrence.

Par passage à la limite, on obtient donc que $\pi_\infty \leq u$ et donc π_∞ est le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$.

$\square$

Théorème: (Rappel)

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et soit $G : I \mapsto I$ une application contractante, c'est à dire qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $(x,y) \in I^2$, $|G(x) - G(y)| \leq k|x-y|$.

Alors G possède un unique point fixe sur I.

Théorème

- *Si $m \leq 1$, alors $\pi_\infty = 1$ (il y aura extinction presque surement)*
- *Si $m > 1$, alors π_∞ est l'unique point fixe de G dans $]0,1[$. (La probabilité d'extinction est le seul point fixe de G dans $]0,1[$)*

Preuve. On va distinguer deux cas :

• Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $G(s) = p_0 + sp_1$ avec $p_0 > 0$ donc $G \neq I_d$.

Donc $\forall (s,t) \in [0,1]^2$, $|G(s) - G(t)| = |p_1(s-t)| = p_1|s-t|$

Par le théorème du point fixe, comme $p_1 < 1$, G admet un unique point fixe dans $[0,1]$, ce point fixe est 1 car $G(1) = G(1) = 1$.

Donc si $p_0 + p_1 = 1$, alors $m = E[X] = p_1 < 1$ et $\pi_\infty = 1$

• Si $p_0 + p_1 \neq 1$, alors G est strictement convexe sur $]0,1[$, donc $x \mapsto G(x) - x$ l'est aussi (car leurs dérivées secondes sont les mêmes).

Donc $(G - I_d)$ ne peut s'annuler que 2 fois au plus (sinon on contredit sa stricte convexité)

On a $G'(0) = p_1$ et $G'(1) = m$, on distingue les cas $m > 1$ et $m \leq 1$ dans les deux tableaux de variations suivants :

$(\star)$ Si $m > 1$:

x	0		π_∞		α		1
$G'(x)-1$	$p_1 - 1$	$-$			0	$+$	$m-1$
$G(x)-x$	p_0	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

π_∞ est donc l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.

$(\star)$ Si $m \leq 1$:

x	0		1
$G'(x)-1$	$p_1 - 1$	$-$	$m-1$
$G(x)-x$	p_0	$\searrow$	0

Et ainsi $\pi_\infty = 1$

$\square$

Remarque

Ce processus peut notamment être utilisé lors d'une réaction nucléaire en chaîne : les particules sont des neutrons qui sont soumis aux chocs d'autres particules. Une particule touchée va créer un certain nombre (supérieur ou égal à 1) de descendants avec une probabilité p et meurt sans donner naissance à un seul descendant avec une probabilité $q = 1 - p$. Dans le pire des cas, la première particule reste inactive et le processus ne démarre pas. Si en revanche le nombre de descendants est important, alors le nombre de particules va augmenter très rapidement et conduira à l'explosion.

D'autres applications sont notables, comme la survivance des noms de famille ou encore la transmission des gênes aux descendants d'un organisme.