Espaces hyperboliques

Dans toute la suite, q désignera une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension n.

Définition 1. *Soit P sous-espace vectoriel de dimension 2 de E. On dit que c'est un plan hyperbolique pour q s'il existe x et y dans E tels que (x,y) soit une base de E et*

$$q(x) = q(y) = 0 \text{ et } f(x,y) = 1$$

Définition 2. *On dit que E est un espace hyperbolique pour q s'il existe $P_1, \dots, P_r$ des plans hyperboliques pour q orthogonaux deux à deux et tels que*

$$E = P_1 \perp \dots \perp P_r$$

Théorème 3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $F_0 = Ker(q_{|F})$ et U un supplémentaire de F_0 dans F. Soit $(u_1, \dots, u_r)$ une base de F_0. Il existe alors $v_1, \dots, v_r \in E$ tels que :*

1. *$P_i = Vect(u_i, v_i)$ est un plan hyperbolique pour $q_{|P_i}$ et (u_i, v_i) est une base hyperbolique de P_i.*
2. *$U, P_1, \dots, P_r$ sont en somme directe dans E deux à deux orthogonaux.*

Ce théorème permet de caractériser les espaces hyperboliques.

Corollaire 4. *E est hyperbolique ssi il existe un sous-espace F totalement isotrope ($F \subset F^\perp$) tel que $dim(E) = 2dim(F)$.*

On démontre le théorème précédent. Commençons par prouver le lemme suivant :

Lemme 5. *Soit $x, y \in E$ non nuls tels que $q(x) = 0$ et $f(x,y) \neq 0$. Alors $P = Vect(x,y)$ est un plan hyperbolique.*

Démonstration. • Analyse. On cherche z de la forme $ax+by$ tel que (x,z) soit une base hyperbolique de $Vect(x,y)$. On a $f(x,z) = 1 = aq(x) + bf(x,y)$. Donc $b = \frac{1}{f(x,y)} \neq 0$ car $q(x) = 0$. De plus $q(z) = 0 = a^2q(x) + 2abf(x,y) + b^2q(y)$. Donc $a = \frac{-q(y)}{2f(x,y)^2}$.

• Synthèse. On pose $z = -\frac{q(y)}{2f(x,y)^2}x + \frac{1}{f(x,y)}y$. (x,z) est bien une base de $Vect(x,y)$ et on a $q(z) = 0$, $f(x,z) = 1$. Donc $Vect(x,y)$ est un plan hyperbolique. □

On peut maintenant montrer le théorème :

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $dim(F_0) = r$.

• Si $r = 1$, on a $U \subset F$ et $U \neq F$. Donc $F^\perp \subset U^\perp$ et $F^\perp \neq U^\perp$ (car $dim(F) + dim(F^\perp) = n$ car q est non dégénérée). Soit alors $a \in U^\perp - F^\perp$. Si $f(a, u_1) = 0$, alors $a \in F_0^\perp$ donc $a \in F^\perp$. C'est impossible. Donc $f(a, u_1) \neq 0$. On pose alors $P = Vect(a, u_1)$. Comme $q(u_1) = 0$ (car $u_1 \in Ker(q_{|F})$) et $f(a, u_1) \neq 0$, alors P est un plan hyperbolique d'après le lemme et il existe $v_1 \in E$ tel que (u_1, v_1) soit une base hyperbolique de P. De plus $P \perp U$ car $a \in U^\perp$ et $u_1 \in U^\perp$ car $u_1 \in F_0$.

• Si $r \geq 2$, on pose $U_1 = Vect(u_2, \ldots, u_r) \perp U$. On a $U_1 \subset F$ et $U_1 \neq F$. Donc comme avant il existe $a \in U_1^{\perp} - F^{\perp}$. Si $f(a, u_1) = 0$, alors $a \in Vect(u_1)^{\perp}$ donc $a \in F^{\perp}$. C'est exclu. Donc $f(a, u_1) \neq 0$.

On pose alors $P_1 = Vect(a, u_1)$. P_1 est un plan hyperbolique par le lemme car $q(u_1) = 0$ et $f(a, u_1) \neq 0$. Donc il existe $v_1 \in E$ tel que (u_1, v_1) soit une base hyperbolique de P_1.

On pose $F_1 = U_1 \perp P_1$. On a $F \subset F_1$. Donc $Ker(q_{|F_1}) \subset Ker(q_{|F}) = Vect(u_1, \ldots, u_r)$. Or si $i \geq 2$, alors $u_i \in Ker(q_{|F_1})$. En effet si $x \in F_1$, x s'écrit $x = u + \lambda a$ avec $y \in Vect(u_1, \ldots, u_r) \perp U = F$. Or $u_i \in Ker(q_{|F})$ donc $f(u_i, x) = \lambda f(u_i, a) = 0$ car $a \in U_1^{\perp}$. De plus $f(u_1, a) \neq 0$ donc

$$Ker(q_{|F_1}) = Vect(u_2, \ldots, u_r)$$

On applique l'hypothèse de récurrence à F_1. On obtient $P_2, \ldots, P_r$ des plans hyperboliques tels que $(U \perp P_1) \perp P_2 \perp \ldots \perp P_r$.

□

Références :

— Perrin - Algèbre

Leçons concernées :

— 170 - Formes quadratiques

Remarques : Le développement a certes un faible recasage mais il a l'avantage de faire travailler la notion d'orthogonalité et d'isotropie générale.

Si c'est trop court, on peut toujours rajouter le résultat classique suivant :

Lemme 6. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $dim(F) + dim(F^{\perp}) = n$.*

Démonstration. On pose

$$\psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & f(x, .) \end{array}$$

ψ est un isomorphisme car q est non dégénérée. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. On la complète en base de E en $(e_1, \ldots, e_n)$. On pose $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. Montrons que :

$$\psi(F^{\perp}) = Vect(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*)$$

Si $u \in \psi(F^{\perp})$, alors $u = f(x, .)$ pour un $x \in F$. On pose $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$. Alors $u(e_i) = 0$ si $i \leq p$. Donc $u \in Vect(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*)$.

Réciproquement si $u \in Vect(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*)$, alors u s'écrit $u = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i^*$. On pose alors $x = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$. Et on a $u = f(x, .)$.

□

Contexte : Ce théorème permet de se ramener à un sous-espace non isotrope car on a plongé F possiblement isotrope dans $P_1 \perp \ldots \perp P_r \perp U$ qui lui n'est pas isotrope. Rappelons que F est dit isotrope si $F \bigcap F^{\perp} = 0$. C'est équivalent à ce que $Ker(q_{|F}) = 0$.

Citons deux applications majeures :

Théorème 7 (Witt)**.** *Si on a $\sigma : F \to F'$ une isométrie, alors il existe $u \in O(q)$ tel que $u_{|F} = \sigma$.*

Un deuxième résultat qu'on rapprochera de celui des isométries affines :

Théorème 8 (Cartan)**.** *Soit $u \in O(q)$, alors u est produit d'au plus n réflexions.*