VM
28/11/14

Polynômes semi-symétriques

On rappelle quelques définitions : soit A un anneau commutatif intègre.

$\mathfrak{S}_n$ agit sur $A[T_1, \dots, T_n]$ par : $\sigma \cdot P(T_1, \dots, T_n) = P(T_{\sigma(1)}, \dots, T_{\sigma(n)})$

On dit que $P \in A[T_1, \dots, T_n]$ est :

- symétrique si $\sigma \cdot P = P \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$.
- alterné si $\sigma \cdot P = \varepsilon(\sigma) P \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$.
- semi-symétrique si $\sigma \cdot P = P \quad \forall \sigma \in \mathcal{A}_n$.

Ex : Le déterminant de Vandermonde $V(T_1, \dots, T_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ T_1 & & T_n \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_n^{n-1} \end{vmatrix}$

est alterné. $\qquad = \prod_{i<j} (T_j - T_i)$

Théorème. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit $F \in K[T_1, \dots, T_n]$ semi-symétrique. Alors il existe un unique couple (P, Q) de polynômes symétriques tels que $F = P + QV$.

Dém : Soit F semi-symétrique. $\forall \sigma \in \mathcal{A}_n$, $\sigma \cdot F = F$.

Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$, alors $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \in \mathcal{A}_n$ donc $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \cdot F = F$.

ainsi $\sigma_1 \cdot F = \sigma_2 \cdot F$.

On note $G = (12) \cdot F$. $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$, $\sigma \cdot F = G$.
(Autrement dit l'orbite de F est de cardinal 2).

Soient τ, τ' deux transpositions.

- $\tau \cdot G = \tau(12) \cdot F = F$ car $\tau(12) \in \mathcal{A}_n$.
- $\tau \cdot (F - G) = \tau \cdot F - \tau \cdot G = G - F = -(F - G)$
- $\tau \cdot (F + G) = \tau \cdot F + \tau \cdot G = G + F = F + G$.
- $\tau\tau' \cdot (F - G) = F - G$
- $\tau\tau' \cdot (F + G) = F + G$.

Comme toute permutation paire est produit d'un nombre pair de transpositions et ——— impaire ——— impair ———,

$F - G$ est alterné et $F + G$ est symétrique.

· Montrons que le Vandermonde V divise $F-G$.

Soient $h<k$. Montrons que $T_k - T_h$ divise $F-G$.

On se place dans l'anneau $A = K[T_1, \dots, \widehat{T_h}, \dots, T_n][T_h]$.

On fait la division euclidienne de $F-G$ par $T_k - T_h$:

(1) $F-G = q(T_k - T_h) + r$ où $\deg_{T_h} r < 1$, i.e. r ne contient pas l'indéterminée T_h.

Soit $\tau = (h\ k)$.

Alors $\tau\cdot(F-G) = \tau\cdot q\ \tau\cdot(T_k - T_h) + \tau\cdot r$

d'où $G-F = \tau\cdot q\ (T_h - T_k) + \tau\cdot r$ (2).

On évalue les égalités (1) et (2) par $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K[T_1, \dots, \widehat{T_h}, \dots, T_n] \\ P(T_h) & \longmapsto & P(T_k) \end{array}$

(1) devient : $(F-G)(T_k) = 0 + r(T_k) = r$

car r est un polynôme constant dans A.

(2) devient : $(G-F)(T_k) = 0 + \tau\cdot r(T_k) = r$

car $\tau\cdot r$ est le polynôme où on remplace dans r T_k par T_h :

Évaluer en $T_h = T_k$ permet de revenir à r.

Donc $r = -r$. Comme $\operatorname{car}(K) \neq 2$: $r = 0$.

Donc $T_k - T_h$ divise $F-G$ $\forall (h,k) \in \{1, \dots, n\}^2$ tels que $h<k$.

Donc V divise $F-G$.

On pose P et Q tels que $F+G = 2P$ et $F-G = 2VQ$.

P est symétrique. Q aussi : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma\cdot(F-G) = \varepsilon(\sigma)(F-G) = \varepsilon(\sigma) 2VQ$

$\sigma\cdot(2VQ) = 2\varepsilon(\sigma) V\ \sigma\cdot Q$

donc $\sigma\cdot Q = Q$.

Et $F = P + VQ$.

Unicité : Si $F = P + VQ$, P, Q symétriques,

alors en posant toujours $G = (1\ 2)\cdot F$, on a $G = P - VQ$

d'où $P = \frac{F+G}{2}$ et $VQ = \frac{F-G}{2}$: P et Q sont uniquement déterminés.