Ça peut paraître long, mais c'est <u>très</u> détaillé et j'écris gros.
Ça passe crème en 15 minutes, t'inquiète !

Translatées d'une fonction :

idée de $\Rightarrow$: Il suffit de mq $E := \text{Vect}(f_a)$ est stable par dérivation. Pour ce faire, on prend une base de E, une fonction $g \in E$, et on mq "les coordonnées des translatées de g sont dérivables" (tu comprendras en lisant)

- Supposons $E = \text{Vect}(f_a)$ de dimension finie. Soit $n := \dim E$. $\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ est une famille de générateurs de E donc $\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq
$$\underline{E = \text{Vect}(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})}$$

- Soit $g \in E$. $\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i}$.

Donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $g_a \in E$, donc $\exists ! (\lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a)) \in \mathbb{R}^n$ tq $g_a = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}$.

<u>Mq $\forall i$, $a \longmapsto \lambda_i(a)$ est dérivable</u>

- Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Alors
$$\begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_a(x_1) \\ \vdots \\ g_a(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}(x_1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}(x_n) \end{pmatrix} \underset{\text{convaincs-t-en}}{=} {}^t\left[f_{a_i}(x_j) \right] \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix}$$

On note $M = \left[f_{a_i}(x_j) \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Si on réussit à inverser M, on a gagné ! Gagnons donc grâce au lemme suivant :

- Lemme : Soit $\mathbb{K}$ un corps, $f_1, \dots, f_n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ une famille libre. Alors $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $M := [f_i(x_j)]$ soit inversible.

_ Dem du lemme : On pose $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$

Pour $x \in \mathbb{K}$, on note $e_x : E \longrightarrow \mathbb{K}$ $\in E^*$.
$f \longmapsto f(x)$

On note $A = \{e_x \mid x \in \mathbb{K}\} \subset E^*$

On a $\text{Vect}(A) = (A^\circ)^\perp = (\{f \mid f(x) = 0 \ \forall x \in K\})^\perp$
$= 0^\perp = E^*$

Donc $\{e_x\}$ génère E^*, donc $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tq
$E^* = \text{Vect}(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$.

Mq pour ces $x_1, \dots, x_n$, on a M inversible

$$M = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ qui annule les lignes de M
$(\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n = 0)$

Cela signifie que $\forall j$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0$

ie $\forall j$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \, e_{x_j}(f_i) = 0$

ie $\forall j$, $e_{x_j}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right) = 0$

ie $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ car $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ base de E^*

Puis par liberté des (f_i), $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

Donc M inversible.

_ Retour à où on en était : D'après le lemme,
Il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tq M est inversible
On choisit donc un tel n-uplet.

Alors $\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix}$ donc les $a \mapsto \lambda_i(a)$ sont dérivables

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(a+x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x) \qquad (*)$

On dérive $(*)$ par rapport à a et on regarde ce qu'il se passe en $a=0$, on trouve :

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(0) f_{a_i}(x)$$

donc $g' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(0) f_{a_i} \quad \in E$

Donc E est stable par dérivation.

- Plus qu'à conclure !

$\forall k, \quad f^{(k)} \in E$. Donc $(f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(n)}) \in E^{n+1}$.

Pour des raisons de cardinalité, cette famille est liée, donc $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq

$\lambda_0 f + \lambda_1 f' + \dots + \lambda_n f^{(n)} = 0$

donc f est solution homo d'une EDL à coeff constants.

- Réciproque : Si f sol homo d'une EDL à coeff constants. Alors ses translatées sont aussi sol. homo d'une EDL à coeff constants. ok...

$\square$