Preuve du théorème de Sharkovskii :

Lemme : Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des intervalles compacts non réduits à un point avec $I_n \subset I$, $I_{n+1} \subset f(I_n)$, alors il existe des intervalles compacts $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset \dots \subset Q_0 = I_0$ et $f^n(Q_n) = I_n$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, mq f a un pt périodique de période k

- $k=1$: f a un pt fixe sur I car I est compact
- $k \geq 2$: Soit a un pt périodique de période 3

On regarde $f(a)-a$, $f^2(a)-f(a)$, $f^3(a)-f^2(a)$

Quitte à remplacer a par $f(a)$ ou $f^2(a)$, on a $a < f(a) < f^2(a)$ ou $a > f(a) > f^2(a)$

On suppose le 1er cas

On pose $K = [a, f(a)]$ et $L = [f(a), f^2(a)]$

$I_0 = \dots = I_{k-2} = L$, $I_{k-1} = K$, $I_k = L$

$I_l = I_n$ si $l \equiv n\,[k]$

$L = [f(a), f^2(a)] \subset f([a, f(a)]) \subset f(K)$

$\subset [a, f^2(a)] \subset f([f(a), f^2(a)]) \subset f(L)$

$K = [a, f(a)] \subset [a, f^2(a)] \subset f(L)$

par le TVI, donc $f(I_n) \subset I_{n+1}$

On obtient des $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le lemme

$f^k(Q_k) = I_k = L = I_0 = Q_0$, or $Q_k \subset Q_0$, donc $Q_k \subset f^k(Q_k)$

On note $Q_k = [c, d]$; $\exists \gamma, \delta \in Q_k$ tels que $f^k(\gamma) = c$ et $f^k(\delta) = d$

donc $f^k(\gamma) - \gamma = c - \gamma \leq 0$ et $f^k(\delta) - \delta = d - \delta \geq 0$

donc par le TVI $f^k - \mathrm{Id}$ s'annule sur Q_k

donc $\exists x_k \in Q_k$ tel que $f^k(x_k) = x_k$

Supposons qu'il existe $k' < k$ tel que $f^{k'}(x_k) = x_k$

alors $f^{k-1}(\underbrace{x_k}_{\in Q_k \subset Q_{k-1}}) \in I_{k-1} = K$

mais $f^{n-1}(x_n) = f^{n-k'-1}(f^{k'}(x_n)) = f^{n-k'-1}(\underbrace{x_n}_{\in Q_n \subset Q_{n-k'-1}}) \in I_{n-k'-1} = L$

donc $f^{n-1}(x_n) \in K \cap L = \{f(a)\}$ et $x_n = f(f^{n-1}(x_n)) = f^2(a)$

- si $k = 2$, contradiction car $f^2(a)$ est périodique de période 3
- si $k > 2$, $f(x_n) = a$, or $f(\underbrace{x_n}_{\in Q_n \subset Q_1}) \in I_1 = L$, d'où contradiction

Donc x_n est périodique de période 3