- Soit (P_n) l'ensemble des (a_n) positifs, comptés dans leur ordre d'apparition.
- Soit (M_n) ——— $|a_n|$, a_n négatifs, ———

- ΣP_n et ΣM_n divergent :

$$p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2} \quad , \; m_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

p_n et P_n ont m̂ comportement (il s'agit de la même suite dans laquelle on a intercalé des 0)

m_n et M_n ———

$p_n + m_n = a_n \quad \Rightarrow$ - Si l'un des deux converge, l'autre aussi

$p_n - m_n = |a_n| \quad \Rightarrow$ les deux ne peuvent converger

$\Rightarrow p_n$ et m_n divergent

$\Rightarrow P_n$ et M_n divergent

$\Rightarrow \Sigma P_n = \Sigma M_n = +\infty$

- On considère $\alpha_n \searrow \alpha$, $\beta_n \nearrow \beta$

soit $k_1 := \inf \{ k \mid P_1 + \dots + P_{k+1} > \beta_1 \}$ → oui car $\Sigma P_n = +\infty$

$l_1 = \inf \{ l \mid P_1 + \dots + P_k - M_1 \dots M_l < \alpha_1 \}$ oui car $\Sigma M_n = +\infty$.

on pose $a'_1 = P_1$ - $a'_{k_1} = P_{k_1}$

$a'_{k_1+1} = -M_1 \dots, -a'_{k_1+l_1} = -M_{l_1}$.

de même si on a $(k_1 \dots k_n)$, $(l_1 \dots l_n)$

$k_{n+1} := \inf \{ k \mid \dot{\Sigma} a'_p + P_{k_n+1} + \dots P_{k_n+k+1} > \beta_{n+1} \}$

$l_{n+1} := \inf \{ l \mid \Sigma a'_p +$ ——— $- M_{l_n+1} - M_{l_n+l+1} < \alpha_{n+1} \}$

alors : $\left| \sum_{p=0}^{l_1 + l_1 + \dots + k_n} a'_p - \beta_n \right| < P_{k_n+1}$ et $\sum_{p=0}^{l_1 + \dots + l_n} a'_p \leq \beta$

$\left| \sum^{l_1 + \dots + l_n} a'_p - \alpha_n \right| < M_{l_n+1}$ et ——— $\geq \alpha$

donc comme $\sum a_n$ converge, $a_n \to 0$, donc $P_n \to 0$

$\Pi_n \to 0$

Donc α et β sont v.a, et ce sont bien les limsup et inf.

comme $a'_n \geq 0$, tout élément entre est v.a.