Leçons

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée.

153 : Polynomes d'endom$^{\text{t}}$ en dim finie

154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme

Endomorphismes semi-simples

45

Références : Gourdon "Algèbre" + Caius pour ②
GG

Déf : E un k-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est semi-simple si pour tout sev F de E stable par u, il existe un supplémentaire de F dans E stable par u.

Thm : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors f est semi-simple ssi μ_f (polynome minimal de f) est sans facteurs carrés.
(ie la décomposition de μ_f en produits d'irréductibles s'écrit
$$\mu_f = \prod_{i=1}^{s} P_i$$ avec les P_i deux à deux distincts)

preuve :

① Supposons f semi-simple et supposons qu'il existe $M, N \in k[X]$ tels que $\mu_f = M^2 N$ avec $\deg M \geq 1$.

MQ $MN(f) = 0$

On note $F = \operatorname{Ker} M(f)$. f commute avec $M(f)$ donc F est stable par f.
f semi-simple donc il existe G un supplémentaire de F dans E stable par f.
- Soit $x \in F$, $MN(f)(x) = N(f)\,(M(f)(x)) = N(f)(0) = 0$
- Soit $x \in G$, G stable par f donc $MN(f)(x) \in G$
$M(f)\,(MN(f)(x)) = M^2N(f)(x) = 0$ donc $MN(f)(x) \in F$

On en déduit que $MN(f)(x) = 0$

$E = F \oplus G$ donc $MN(f) = 0$.

Ainsi, $MN \mid \mu_f$. Absurde car $\deg \mu_f < \deg(MN)$ et $\mu_f \neq 0$.

D'où μ_f sans facteurs carrés (inversibles).

② Supposons μ_f irréductible

On pose $L = \dfrac{k[X]}{(\mu_f)}$ le corps de rupture de μ_f. L est une extension de k.

On munit E d'une structure de L-ev : $L \times E \to E$
$$(\bar{P}, v) \mapsto P(f)(v)$$

Lemme : Soit F un k-sev de E

Alors F est stable par f ssi F est un L-sev de E.

Soit F un k-sev de E stable par f.

Alors F est un L-sev de E.

Soit G un L-supplémentaire de F dans E. En particulier G est un k-sev de E.

G est stable par f et $F \oplus G = E$.

Donc f est semi-simple.

(3) Supposons $\mu_f = \prod_{i=1}^{s} P_i$ avec les P_i irréductibles deux à deux distincts.

Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, on note $E_i = \mathrm{Ker}\, P_i(f)$ k-sev de E stable par f.

Soit F un k-sev de E stable par f.

On fixe $i \in [\![1,s]\!]$. $F \cap E_i$ est stable par $f_{|E_i}$ et $\mu_{f_{|E_i}} \mid P_i$

P_i irréductible donc $\mu_{f_{|E_i}} = P_i$.

Par (2), il existe G_i un k-supplémentaire de $F \cap E_i$ dans E_i stable par $f_{|E_i}$

Lemme des noyaux appliqué à f : $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^{s} \left((F \cap E_i) \oplus G_i \right) = \left[\bigoplus_{i=1}^{s} (F \cap E_i) \right] \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} G_i \right]$

Lemme des noyaux appliqué à $f_{|F}$: $F = \bigoplus_{i=1}^{s} (F \cap E_i)$

On pose $G = \bigoplus_{i=1}^{s} G_i$

On a $E = F \oplus G$ avec G k-sev de E stable par f.