49 Equation de la chaleur et distributions

ref : Zuily.

On cherche à résoudre le problème d'évolution suivant : équation de la chaleur avec condition initiale :

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$
$$u(0,.) = u_0$$

avec $u \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ et $u_0 \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$. Si u est régulière jusqu'en $t=0$, c'est-à-dire $u \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[\times\mathbb{R})$, la condition initiale a un sens. (En fait, c'est toujours le cas si $u_0 \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$).

Si u_0 est moins régulière, par exemple $L^p(\mathbb{R})$, on peut encore donner un sens à la condition initiale en imposant : $u(t,.) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} u_0$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Si u_0 est encore moins régulière : $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, cela n'a plus de sens et on va donc traduire ce problème et montrer l'existence d'une distribution solution du problème.

On cherche des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ à support dans $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\partial_t u - \Delta u = \delta_{t=0} \otimes u_0$$

La raison heuristique est que si on a une solution u définie sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ aussi régulière et intégrable que l'on veut, on peut l'étendre en une fonction $\tilde{u}$ en posant 0 sur $]-\infty,0[\times\mathbb{R}$. Elle est régulière hors de la droite $\{t=0\}$ et la formule des sauts nous dit que :

$$\partial_t \tilde{u}(t,x) = \partial_t u(t,x) + \delta_{t=0} u_0(x)$$

Le laplacien concerne les dérivées en espace qui n'ont toujours pas de saut après prolongement à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, donc on a

$$\partial_t \tilde{u}(t,x) + \Delta\tilde{u}(t,x) = \partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) + \delta_{t=0}u_0(x) = \delta_{t=0}u_0(x)$$

Théorème 49.1 *Si $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, il existe une solution u à ce problème. De plus, si u_0 est dans $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$ alors, la solution obtenue est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale au sens classique : $u(0,.) = u_0$.*

Preuve. L'idée est de transformer l'équation en appliquant la transformée de Fourier partielle en espace. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, notre convention pour la transformée de Fourier est $\hat{\varphi}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$. Par application de la transformée de Fourier, l'équation devient :

$$\partial_t \hat{u} + \xi^2 \hat{u} = \delta_{t=0} \otimes \hat{u_0}$$

On voit alors que la fonction $v(t,\xi) = e^{-t\xi^2}H(t)\hat{u_0}(\xi)$ où $H(t) = 1_{t\geq 0}$ fonction de Heaviside, v est bien une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ car $\hat{u_0}$ est L^∞ (même analytique et à croissance lente) car c'est la transformée de Fourier d'une distribution à support compact. Vérifions que c'est solution de l'équation : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}
< \partial_t v, \varphi > = - < v, \partial_t\varphi > &= -\int_{\mathbb{R}^2} e^{-t\xi^2}H(t)\hat{u_0}(\xi)\partial_t\varphi(t,\xi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \hat{u_0}(\xi)(\int_0^{+\infty} e^{-t\xi^2}\partial_t\varphi(t,\xi)\mathrm{d}t)\mathrm{d}\xi \quad \text{(Fubini)} \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \hat{u_0}(\xi)(-\varphi(0,\xi) + \xi^2\int_0^{+\infty} e^{-t\xi^2}\varphi(t,\xi)\mathrm{d}t)\mathrm{d}\xi \quad \text{(IPP)} \\
&= < \delta_{t=0}\otimes\hat{u_0}, \varphi > + < \xi^2 v, \varphi >
\end{aligned}$$

Donc v vérifie l'EDP passée en Fourier. La transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$ et elle échange dérivation en multiplication par ξ. Donc si on pose $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}v(t,\xi)$, on voit que E est un solution du problème initial. Comme Fourier échange produit et convolution, on trouve que

$$u = E(t,x) * u_0$$

où

$$E = \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} H(t) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

On a le droit de convoler car $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$.

Il reste à montrer la régularité de u dans le cas $u_0 \in \mathcal{C}_c^0$ et le fait que u vérifie les conditions initiales au sens classique. Tout d'abord le noyau E est $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ par dérivation sous le signe intégral (le terme $e^{-t\xi^2}$ contrôle tout).

Comme u_0 est une fonction, on a une expression intégrale du produit de convolution :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} E(t,x-y) u_0(y) \mathrm{d}y$$

Encore par dérivation sous le signe intégral, on voit que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Montrons la continuité jusqu'en $t = 0$, soit donc $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |u(t,x) - u_0(x_0)| &= |\int_{\mathbb{R}} E(t,y)(u_0(x-y) - u_0(x_0)) \mathrm{d}y| \\ &= \int_{|y|\leq\eta} |E(t,y)||u_0(x-y) - u_0(x_0)| + 2\|u_0\|_\infty \int_{|y|>\eta} |E(t,y)| \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Par continuité de u_0 en x_0 et parce que $E(t,y)$ est un bon noyau pour $t \to 0$, on trouve $|u(t,x) - u_0(x_0)| < \epsilon$ pour (t,x) assez proche de $(0,x_0)$. $\square$