48 Point de Fermat-Torricelli

ref : FGN algèbre 3 p.258, Eiden.

Théorème 48.1 (Ptolémée) *Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe d'un plan euclidien. Alors $AC.BD \leq AB.CD + AD.BC$ avec égalité si et seulement si A, B, C et D sont cocycliques ou alignés.*

Preuve. On assimile le plan euclidien à $\mathbb{C}$, on note a, b, c et d les affixes des points A, B, C et D. On écrit alors $|AC.BD| = |(a-c)(b-d)|$ etc, et on remarque que :

$$(c-a)(d-b) = (b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)$$

On en déduit l'inégalité par l'inégalité triangulaire, et il y a égalité si et seulement si les vecteurs sont positivement liés, c'est-à-dire si

$$\arg(b-a)(d-c) = \arg(d-a)(c-b) \pmod{2\pi}$$

c'est-à-dire :

$$\arg\frac{b-a}{d-a} = \arg\frac{c-b}{d-c} = \arg\frac{b-c}{d-c} + \pi \pmod{2\pi}$$

En terme d'angles orientés de vecteurs (ou demi-droites), cela signifie :

$$(\vec{AB}, \vec{AD}) = (\vec{CB}, \vec{CD}) + \pi \pmod{2\pi}$$

Par le théorème de l'angle inscrit, cela signifie que A, B, C, et D sont cocycliques. □

Théorème 48.2 (Point de Fermat) *Soit ABC un triangle non aplati du plan affine euclidien identifié à $\mathbb{C}$ via un repère orthonormé. On note a, b et c les affixes des points A, B et C. On construit les points A', B' et C' tels que ACB', $CB'A$ et $A'CB$ soient des triangles équilatéraux directs. On a :*

1. *Les droites (AA'), (BB') et (CC') concourent en un point M*
2. *Si les angles du triangle ABC sont tous $\leq \frac{2\pi}{3}$ alors M est un minimum de la fonction de Fermat $f(M) = MA + MB + MC$.*

Preuve. On utilise la caractérisation du triangle équilatéral :

$$pqr \text{ est équilatéral } \Leftrightarrow p + jq + j^2 r = 0$$

Calculons les affixes des points :

$$a' = -jc - j^2 b, \quad b' = -ja - j^2 c, \quad c' = -jb - j^2 a$$

Puis,

$$a'' = \frac{-jc - j^2 b + c + b}{3}, \quad b'' = \frac{-ja - j^2 c + a + c}{3}, \quad c'' = \frac{-jb - j^2 a + a + b}{3}$$

Enfin,

$$a'' + jb'' + j^2 c'' = \frac{1}{3}(-jc - j^2 b + c + b + j(-ja - j^2 c + a + c) + j^2(-jb - j^2 a + a + b)) = 0$$

Cela montre le premier point, passons au deuxième.

La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie C' sur B et C sur B'. En particulier, les droites (BB') et (CC') forment un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. Elles s'intersectent donc un point noté M et l'angle $C\hat{M}B$ vaut $\frac{2\pi}{3}$. De plus, le point A, centre de la rotation est sur une bissectrice des droites (BB') et (CC'). Les droites (AM) et (BB') forment donc un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, tout comme les droites (AA') et (BB') par un raisonnement symétrique au précédent. Ainsi, M est sur la droite (AA') et il y a bien concours.

Comme on a $AMC = AMB = BMC = \frac{2\pi}{3}$, d'après le théorème de l'angle au centre, M est sur chacun des cercles circonscrits aux triangles extérieurs ACB', $AC'B$ et $BA'C$.

On applique enfin le théorème de Ptolémée dans le quadrilatère inscriptible $MBA'C$:

$$MB \times A'C + MC \times A'B = MA' \times BC$$

Comme $BA'C$ est équilatéral, cela donne :

$$MB + MC = MA'$$

Puis,

$$f(M) = MA + MA' = AA'$$

Ici, on a besoin que M soit situé entre A et A' ce qui est équivalent à $B\hat{A}C \leq \frac{2\pi}{3}$.

On sait aussi que $AA' = BB' = CC'$, en regardant les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre A, B et C.

Montrons que AA' est la valeur minimale de la fonction f. Si N désigne un point du plan et N' l'image de N par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a $NB = NN'$ car le triangle NBN' est équilatéral. On a aussi $N'A' = NC$ car la rotation précédente conserve les distances et envoie A' sur C. On trouve donc par inégalité triangulaire :

$$f(N) = NA + NB + NC = AN + NN' + N'A' \geq AA'$$

$\square$

Leçons concernées : nombres complexes en géométrie, problèmes d'angle et de distance.