46 Théorème de Molien

ref : Leichtnam, Peyré.

THÉORÈME 46.1 *Soit G un sous-groupe fini de $GL(n,\mathbb{C})$. Cette représentation (fidèle) induit une représentation de G sur l'espace $A=\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ qui préserve la décomposition en composantes homogènes $A=\oplus_k A_k$. Si $a_k(G)$ désigne la dimension du sous-espace A_k^G des vecteurs invariants sous G, la série génératrice des $a_k(\rho)$ s'exprime par la formule :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(G)X^k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(\mathrm{id}-Xg)}$$

PREUVE. On définit la représentation $\rho : G\to GL(A)$ par $g.P=\rho(g)(P)=P\circ g^{-1}$, cela correspond à un changement de variable linéaire dans le polynôme. C'est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}(A)$ car c'est linéaire dans en P et l'inverse est évident. C'est bien un morphisme de groupes car $(gh).P=P\circ(gh)^{-1}=(P\circ h^{-1})\circ g^{-1}=g.(h.P)$.

Cela préserve les composantes homogènes, ce que l'on peut voir sur les monômes, si $g=(a_{i,j})$ et $P=X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}$ avec $a_1+\dots+a_n=k$,

$$g.P=(a_{1,1}X_1+\dots+a_{1,n}X_n)^{a_1}\times\dots\times(a_{n,1}X_1+\dots+a_{n,n}X_n)^{a_n}$$

On voit en développant que $g.P$ est encore un polynôme homogène de degré k.

On note ρ_k la représentation de G induite sur A_k. On cherche $a_k(G)=\dim A_k(G)$, on va utiliser la formule général donnée par le lemme suivant :

LEMME 46.2 *Soit V une représentation d'un groupe G. Si $V^G=\{v\in V|\forall g\in G, g.v=v\}$, alors*

$$\dim V^G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)$$

PREUVE. On introduit l'endomorphisme :

$$p=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$$

C'est un projecteur par le calcul :

$$p\circ p=\frac{1}{|G|^2}\sum_g\sum_h gh=\frac{1}{|G|^2}\sum_g |G|p=p$$

Son image est V^G : si $v\in V^G$, on a clairement $pv=v$, donc $v\in\operatorname{im}p$ et si $v=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}gw$, clairement, $h.v=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}hgw=v$. On conclut par le fait que la trace d'un projecteur est la dimension de son espace image. □

Il suffit donc de calculer les traces des éléments $\rho_k(g)$. Pour $g\in G$, $\mathrm{tr}(\rho_k(g))$ ne dépend que de la classe de conjugaison de $\rho_k(g)$ dans $\mathrm{GL}(A_k)$. Comme G est fini, tous les éléments de g, sont d'ordre fini, donc diagonalisable car annule un polynôme de type X^d-1 qui est scindé à racines simples. Soit donc $u\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ telle que $ugu^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de g. Pour $k\in\mathbb{N}$, les monômes $(X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n})$ avec $k_1+\dots+k_n=k$, forment une base de A_k. Il suffit de voir l'action de g sur ces éléments :

$$(ugu^{-1}.X^{k_1}\dots X^{k_n}=\lambda_1^{k_1}\dots\lambda_n^{k_n}X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}$$

Donc comme la trace est invariante par conjugaison :

$$\mathrm{tr}(\rho_k(g)) = \mathrm{tr}(\rho_k(u)\rho_k(g)\rho_k(u^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho_k(ugu^{-1}) = \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \lambda_1^{k_1}\dots\lambda_n^{k_n}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} a_k(G)X^k &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\lambda_1^{k_1}\dots\lambda_n^{k_n})X^k \\
&= \frac{1}{G}\sum_{g\in G}\sum_{k\geq 0}(\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\lambda_1^{k_1}X^{k_1}\dots\lambda_n^{k_n}X^{k_n}) \\
&= \frac{1}{G}\sum_{g\in G}\prod_{i=1}^{n}(\sum_{k_i\geq 0}\lambda_i^{k_i}X^{k_i}) \qquad \text{(Produit de Cauchy)} \\
&= \frac{1}{G}\sum_{g\in G}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda_i X_i} \qquad \text{(Développement en série formelle de } \frac{1}{1-\lambda X}\text{)} \\
&= \frac{1}{G}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(\mathrm{id}-Xg)}
\end{aligned}$$

□

Leçons concernées : séries formelles, polynômes à n indéterminées, représentations,