· Rudin p. 94 (Texte 2 chapitre LP)

· Romboldi, exos pour l'agrégation

Théorème de Bohr - Mollerup (preuve d'Artin)

DEV

Énoncé : Soit f une fonction strictement positive définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que

(a) $f(x+1) = x f(x)$ pour $x > 0$ (b) $f(1) = 1$

(c) f est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $f = \Gamma$ où la fonction gamma est définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

Dem : * Vérifions tout d'abord qu'une telle fonction f existe : Γ vérifie effectivement ces hypothèses. En effet, $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifie :

(a) $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x}\, dt = \left[-e^{-t} t^{x}\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = x\Gamma(x)$ par IPP, les fonctions mises en jeu étant toutes C^1, intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (et $x > 0$ donc "$-e^{-0} 0^x = 0$".

(b) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$.

(c) Soient $0 < x < y < +\infty$ et $\lambda \in]0,1[$. On écrit $\lambda = \frac{1}{p}$ où $p > 1$, et $1 - \lambda = \frac{1}{q}$ où $q > 1$. Ainsi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\lambda(x-1)}\, t^{(1-\lambda)(y-1)}\, dt$

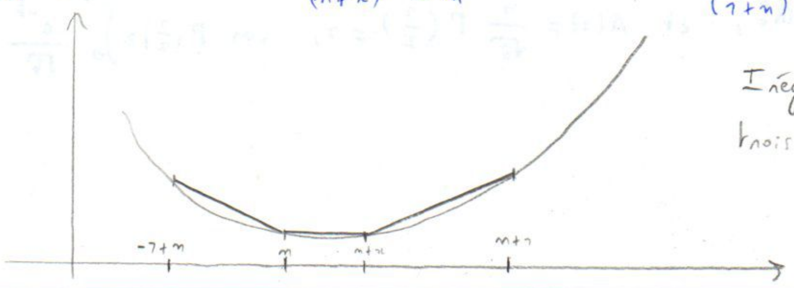
$$= \int_0^{+\infty} (e^{-t} t^{x-1})^{1/p} (e^{-t} t^{y-1})^{1/q}\, dt \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt\right)^{1/q}$$

Soit $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \Gamma(x)^{\lambda}\, \Gamma(y)^{1-\lambda}$.

* Soit f vérifiant les hypothèses de l'énoncé. En appliquant (a) successivement, on a pour $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x+n) = (x+n-1) \dots (x+1) x f(x)$. Ainsi, les valeurs de f sur $\mathbb{R}_+^*$ sont déterminées par ses valeurs sur $]0,1]$.

Soit $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Par la log-convexité, on a :

$$\frac{\ln(f(-1+n)) - \ln(f(n))}{(-1+n) - n} \leq \frac{\ln(f(n+x)) - \ln(f(n))}{(n+x) - n} \leq \frac{\ln(f(1+n)) - \ln(f(n))}{(1+n) - n}$$



Inégalité des trois pentes

Comme $f(n) = (n-1)!$, cela s'écrit :

$$\ln(n-1) \leq \frac{\ln(f(x+n)) - \ln(n-1)!}{x} \leq \ln(n)$$

Puis $\ln\left((n-1)^x (n-1)!\right) \leq \ln(f(x+n)) \leq \ln(n^x (n-1)!)$

Puisque l'exponentielle est (strictement) croissante, cela donne

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!$$

Et donc, par la relation de récurrence sur $f(x+n)$:

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)x} = \frac{n^x\, n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \cdot \frac{x+n}{n}$$

Vrai pour tout $x \in \,]0,1]$ et $n \geq 2$. En changeant n en $n+1$ à gauche, on a donc :

$$\frac{n^x\, n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x\, n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \cdot \frac{x+n}{n}$$

soit $\displaystyle f(x)\frac{n}{x+n} \leq \frac{n^x\, n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \leq f(x)$.

D'où, en faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons $\displaystyle f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{(x+n)\dots(x+1)x}$.

Cela est en particulier vrai pour la fonction Γ. Ainsi, pour $x \in \,]0,1]$:

$$\underbrace{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{(x+n)\dots(x+1)x}}_{\text{formule de Gauß}} = f(x) \quad \text{et donc } f = \Gamma. \qquad \blacksquare$$

<u>Applications :</u> * Pour $x>0$, on a $\Gamma(x) = \dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ (formule de Legendre)

* La fonction bêta est définie par $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ pour $x,y \in \mathbb{R}_+^*$.

On a la formule $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

2] * Posons $\Lambda(x) := \dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ pour $x>0$.

Alors $\Lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, et $\Lambda(1) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, car $\displaystyle\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \overset{t=s^2}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s}\, s\, ds = \sqrt{\pi}$.

De plus, $\Lambda(x+1) = \dfrac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{x}{2}+1\right) = \dfrac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \dfrac{x}{2} \Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\, x\, \Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right) = x \Lambda(x).$

Enfin, comme $x \mapsto 2^{x-1}$, $\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)$ sont toutes logarithmiquement convexes, Λ l'est aussi par produit. Par le théorème de Bohr-Mollerup, $\Lambda = \Gamma$.

* Pour $y > 0$, on note $\Phi(x) := \dfrac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$: $\Phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$.

On a $\Phi(1) = \dfrac{B(1,y)\Gamma(1+y)}{\Gamma(y)} = y\, B(1,y) = \displaystyle\int_0^1 y (1-t)^{y-1} dt = 1.$

De plus, $\Phi(x+1) = \dfrac{B(x+1,y)\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(y)} = (x+y)\, B(x+1,y) \dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$

$$\begin{aligned}
\text{Or } (x+y)B(x+1,y) &= x \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 t^x y (1-t)^{y-1} dt \\
&= x \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt + \left[-t^x (1-t)^y\right]_0^1 + x \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\
&= x \int_0^1 (t+1-t)\, t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = x\, B(x,y).
\end{aligned}$$

Donc $\Phi(x+1) = x\, \Phi(x)$.

Enfin, $x \mapsto \Gamma(x+y+1)$ et $x \mapsto B(x+1,y)$ sont logarithmiquement convexe (pour B, c'est aussi une conséquence de Hölder). Donc $\Phi = \Gamma$ par le théorème de Bohr-Mollerup.