40 Table des caractères de D_4 et H_8

ref : Maison

THÉORÈME 40.1 *Les groupes D_4 et H_8 ont même table des caractères mais ne sont pas isomorphes*

PREUVE. Commençons par D_4. Il s'agit du groupe d'isométrie du carré, il est engendré par un rotation r et une réflexion s. Conjuguer une rotation par une symétrie donne la rotation d'angle opposé : $srs^{-1} = r^{-1}$. Alors que conjuguer une rotation par une symétrie donne une symétrie d'axe bougé par la rotation : $rsr^{-1} = s_{r(axe)}$. Ces relations permettent de donner les classes de conjugaison :

$$\{\mathrm{id}\}, \{-\mathrm{id}\}, \{r, r^{-1}\}, \{s, rsr^{-1}\}, \{sr, rs\}$$

Le carré donne une représentation de dimension 2 (via complexification : $\mathrm{O}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$). Elle est irréductible car sinon, il y aurait un vecteur propre commun à toutes les transformations de D_4, mais deux symétries d'axe non orthogonaux n'ont aucun vecteur propre commun, donc ce n'est pas possible. On peut commencer la table des caractères avec la triviale et celle de dimension 2 du carré.

	1 id	1 $-$ id	2 r	2 s	2 rs
trivial	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1
Carré	2	-2	0	0	0

On sait que la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles vaut 8, cela force les trois dernières représentations à être de dimension 1. On cherche alors des morphismes de D_4 dans $\mathbb{C}^*$. Les symétries étant d'ordre 2 sont envoyées dans $\{\pm 1\}$ et la rotation est le produit de deux symétries donc envoyées aussi dans $\{\pm 1\}$. On cherche donc des morphismes $D_4 \to \{\pm 1\}$. Ils sont déterminés par l'image des générateurs r et s, il n'y a aucune contrainte car la seule relation à vérifier est $srs^{-1} = r^{-1}$ qui est clairement vérifié dans $\{\pm 1\}$. On complète donc en mettant ± 1 pour r et s et les autres sont déterminés (noter que $-\mathrm{id} = r^2$).

Passons à H_8. C'est l'ensemble $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ avec les relations $ij = k$, $jk = ki$, $ki = j$ et $i^2 = j^2 = k^2 = \pm 1$. Le centre est $\{\pm 1\}$ et on a par exemple $jij^{-1} = -i$, les classes de conjugaison sont donc :

$$\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$$

On quotiente par le centre $\{\pm 1\}$, on trouve un groupe d'ordre 4 dont tous les éléments sauf le neutre sont d'ordre 2, c'est donc $V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ses représentations sont de dimension 1 car c'est un groupe abélien, elles sont "produits" de représentations de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on remplit la table avec celles-là qui sont triviales sur -1. On trouve la dernière (de dimension 2) par orthogonalité des colonnes.

	1 1	1 -1	2 i	2 j	2 k
trivial	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	1	-1
	1	1	-1	-1	1
	2	-2	0	0	0

On remarque que les tables des caractères sont les mêmes. Pourtant les groupes ne sont pas isomorphes : il y a 2 éléments d'ordre 4 dans D_4 (r et r^{-1}) alors qu'il y en a 6 dans H_8.

$\square$