Remarque. Il y a encore bien des choses à dire sur l'action de ce groupe : par exemple, que l'action est fidèle une fois quotientée par $\pm I_2$, transitive pour le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ou encore que le quotient pour cette action s'identifie à l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$ à homothétie près. Ne pas hésiter à rajouter l'une ou l'autre de ces propriétés si le développement parait un peu court.

Référence : [Alessandri]
Leçons compatibles :
101 Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications
108 Exemples de parties génératrices d'un groupes. Applications.
182 Application des nombres complexes à la géométrie. Homographies

6 Théorème de Pascal via les coordonnées barycentriques

Prérequis :
- Coordonnées barycentriques et équations de droites et de coniques dans celles-ci

Théorème (Pascal)**.** *Soient six points distincts du plan A, B, C, A', B', C' dont trois quelconques ne sont jamais alignés et ne formant pas de droites parallèles entre elles. Alors, une conique non dégénérée passe par ces six points si et seulement si les points d'intersection (dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) m de (BC') et $(B'C)$, n de (AC') et $(A'C)$ et p de (AB') et $(A'B)$ sont alignés.*

On se place dans les coordonnées barycentriques associées au repère (A, B, C).

Lemme. *La droite passant par deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ distincts a pour équation, en coordonnées barycentriques :*

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Soit $P = (X, Y, Z)$ un point. Comme ce sont des coordonnées barycentriques, on les normalise à somme 1 (ce qui ne modifie passe l'annulation de la matrice ci-dessus). Alors, $P \in (MM')$ si et seulement si $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MM'}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} X - x &= t(x' - x) \\ Y - y &= t(y' - y) \\ Z - z &= t(z' - z) \end{cases}$$

Comme on a normalisé les coordonnées barycentriques, la dernière ligne est la somme des deux autres, et donc il suffit que t vérifie le système des deux premières lignes, c'est-à-dire que

$$0 = \begin{vmatrix} X - x & x' - x \\ Y - y & y' - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X - x & x' - x & x \\ Y - y & y' - y & y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x' & x \\ Y & y' & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x' & x \\ Y & y' & y \\ Z & z' & z \end{vmatrix}$$

$\square$

Posons maintenant $A'(a, a', a'')$, $B'(b, b', b'')$ et $C'(c, c', c'')$. Comme il n'y a aucun alignement entre les six points, ces neufs coordonnées sont non nulles. Ensuite, d'après le lemme précédent,

$$(X, Y, Z) \in (BC') \cap (C'B) \Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 0 & 1 \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} c''X &= cZ \\ b'X &= bY \end{cases}$$

c'est-à-dire que m a pour coordonnées barycentriques $(bc, b'c, bc'')$.

De même, n a pour coordonnées barycentriques $(c'a, c'a', c''a')$ et p a pour coordonnées barycentriques $(ab'', a''b', a''b'')$. Dans le cas où la somme des coordonnées est nulle, elle définit un point à l'infini dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, et on peut traiter le problème d'alignement en coordonnées projectives comme via le lemme.

Soit maintenant une conique passant par les points A, B, C. Son équation en coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C est de la forme

$$a - 0YZ + b_0XZ + c_0XY = 0$$

avec a_0, b_0, c_0 non tous nuls (les autres termes homogènes quadratiques sont nuls car la conique passe par A, B et C). Elle passe par A', B', C' si et seulement si a_0, b_0 et c_0 sont solutioons non nulles du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Xa'a'' + Yaa'' + Zaa' & = & 0 \\ Xb'b'' + Ybb'' + Zbb' & = & 0 \\ Xc'c'' + Ycc'' + Zcc' & = & 0 \end{array} \right.$$

dont on note d' le déterminant Or, m, n et p sont alignés si et seulement si

$$d = \begin{vmatrix} bc & b'c & bc'' \\ c'a & c'a' & c''a' \\ ab'' & a''b' & a''b'' \end{vmatrix} = 0.$$

Or, $s = a'a''bb''cc' \neq 0$ donc

$$d = s \begin{vmatrix} 1 & b'/b & c''/c \\ a/a' & 1 & c''/c' \\ a/a'' & b'/b'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'a'' & b'b'' & c'c'' \\ aa'' & bb'' & cc'' \\ aa' & bb' & cc' \end{vmatrix} = d'$$

donc m, n et p sont alignés dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une conique passant par A, B, C, A', B', C'.

Celle-ci est automatiquement non dégénérée car sinon ce serait la réunion de deux droites, et alors parmi cinq de ses points distincts, trois seraient alignés.

Références

[Audin] Michèle Audin, *Géométrie*, EDP Sciences.

[IR] K. Ireland et M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Springer.

[Davenport] Harold Davenport, *Multiplicative number theory*, Springer.

[FGN] Francinou-Gianella-Nicolas, *Exercices de mathématiques Oraux X-ENS, Algèbre 1*, Cassini.

[Goblot] Rémi Goblot, *Algèbre commutative*, Dunod.

[Alessandri] Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod.