35 Diagonalisabilité et semi-simplicité

Ref : Mneimné, Tauvel.

THÉORÈME 35.1 *Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}(E)$.*
- *u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace admet un supplémentaire stable.*
- *u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et tout sous-espace* stable *admet un supplémentaire stable.*

PREUVE.
Si u est diagonalisable

Son polynôme caractéristique est scindé ce que l'on voit en mettant u sous forme diagonale, et par invariance de χ par changement de base.

Soit F un sous-espace de E. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(f_1, \dots, f_p)$ en une base de E en rajoutant $n - p$ vecteurs parmi la base $(e_1, \dots, e_n)$, quitte à réindexer, on peut supposer que c'est $(e_{p+1}, \dots, e_n)$, ces vecteurs engendrent alors un sous-espace stable supplémentaire de F.

Si tout sous-espace admet un supplémentaire stable.

On construit une base de vecteurs propres de la manière suivante : Prenons un hyperplan H quelconque, il existe une droite stable supplémentaire, donc dirigée par un vecteur propre e_1. Si on a construit une famille libre de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_k)$, on prend un hyperplan contenant $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, et on trouve une droite stable $\mathrm{Vect}(e_{k+1})$ supplémentaire à H. On conclut par récurrence.

Si χ_u est scindé et tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable

On raisonne par récurrence sur la dimension. En dimension 1, c'est clair puisque tout endomorphisme est diagonal. Si c'est vrai en dimension $n - 1$, montrons le en dimension n. Comme χ_u est scindé, u admet un vecteur propre, qui dirige donc une droite stable. Par hypothèse, on peut trouver un hyperplan stable H supplémentaire à cette droite. L'endomorphisme induit u_H est encore scindé car χ_{u_H} divise χ_u. Il est également semi-simple : si F est un sous-espace de H stable par u_H. Vu comme sous-espace de E, F est stable par u, donc admet un supplémentaire G dans E, stable par u. On a donc la décomposition $E = F \oplus G$ respectée par u. On intersecte avec H, et on obtient, comme $F \subset H$, $H = F \oplus (G \cap H)$ et $G \cap H$ est un supplémentaire de F dans H stable par u_H.

On conclut par récurrence. □

On peut utiliser ce critère (qui est élémentaire) pour faire une preuve géométrique (sans polynôme annulateur) du fait suivant :

COROLLAIRE 35.2 *Soit u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.*

PREUVE. Soit F stable par u, et soit G un sous-espace de F stable par u_F. Le premier critère dit que G admet un supplémentaire H dans E stable par u, on intersecte avec F, comme $G \subset F$:

$$F = G \oplus (H \cap F)$$

$H \cap F$ est donc un supplémentaire de G dans F, stable par u_F. Donc u_F est diagonalisable d'après le premier critère du théorème. □