3 Développements

Énoncé [T] : Un triangle ABC, est équilatéral si et seulement si : $Z_A + j.Z_B + j^2.Z_C = 0$ ou(exclusif) $Z_A + j^2.Z_B + j.Z_C = 0$ ou encore $(Z_A - Z_B)^2 + (Z_B - Z_C)^2 + (Z_C - Z_A)^2 = 0$. On donnera la description de deux éléments $z \in \mathbb{C}$ tel que (i, z, iz) forment un triangle équilatéral.

Démonstration. Lemme : Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre $c \in \mathbb{C}$ alors $R(z) = -j^2.z - j.c$.
Preuve du lemme : on note z' l'image de z par R alors $(z' - c) = e^{i\frac{\pi}{3}}.(z - c)$ en ce ramenant la rotation de centre 0.

On utilise la formule $(e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = -1$ pour voir que que $-e^{i\frac{\pi}{3}} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^4 = j^2$ et donc $(z' - c) = -j^2.(z - c)$. On développe en simplifiant grâce à l'égalité $1 + j + j^2 = 0$ et on trouve $R(z) = -j^2.z - j.z$

Un triangle (a, b, c) est équilatéral (sens trigonométrique) si et seulement si $R(a) = b$, or d'après ce qui précède $-j^2.a - j.c = b$ ce qui équivaut en multipliant par j à avoir $a + b.j + c.j^2 = 0$

Un triangle (a, b, c) est équilatéral (sens anti-trigonométrique) si et seulement si $R(b) = a$, or d'après ce qui précède $-j^2.b - j.c = a$ ce qui équivaut à avoir $a + b.j^2 + c.j = 0$.

Donc un triangle (a, b, c) est équilatéral quelconque si et seulement si,

$$(a + b.j^2 + c.j).(a + b.j + c.j^2) = 0$$

ce qui équivaut encore à l'égalité,

$$a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca)(j^2 + j) = 0$$

mais $1 + j + j^2 = 0$ d'où,

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

qui est égale aussi,

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

Application : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que (i, z, iz) forment un triangle équilatéral, par ce qui précède si un tel z réalise ceci on a $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ avec $(i, z, iz) = (a, b, c)$ ce qui donne le polynôme du second degré $iz^2 - (1 - i)z + 1 = 0$ qui nous founit deux solutions après résolution $\frac{(1-i)\pm(\sqrt{3}(1-i))}{2i}$ □