

3 Développements

Énoncé [E] : Soient $A, B, C, M \in \mathbf{S}^1$ distincts, A', B', C' les points antipodaux respectifs de A, B, C et soient A'', B'', C'' les points d'intersections respectifs de $(A'M)$ et (BC) ; $(B'M)$ et (AC) ; $(C'M)$ et (AB) . Montrons que O, A'', B'', C'' sont alignés.

Lemme : Soient $A, B, C, D \in \mathbf{S}^1$ distincts tel que $(AB) \cap (CD) \neq \emptyset$ alors on a

$$z \in (AB) \cap (CD) = \left\{ \frac{cd(a+b) - ab(c+d)}{cd - ab} \right\}$$

Démonstration.

$$(AB) = \{ \overline{(a-b)}z - (a-b)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0 \}$$

on a donc équivalence entre $z \in (AB)$ et

$$z = \frac{b\bar{a} - a\bar{b}}{(a-b)} + \frac{a-b}{(a-b)} \cdot \bar{z}$$

de plus on a dans $\mathbf{S}^1$, les deux équations algébriques suivantes :

$$(a-b) = -ab \cdot \overline{(a-b)}, \quad (a+b) \cdot \overline{(a-b)} = b\bar{a} - a\bar{b}$$

et donc on a $z \in (AB)$ si et seulement si $z = a + b - ab\bar{z}$, par suite $z \in (AB) \cap (CD)$ si et seulement si

$$\begin{cases} z = a + b - ab\bar{z} \\ z = c + d - cd\bar{z} \end{cases}$$

ce qui implique en faisant $L_1 \leftarrow cd \cdot L_1 - ab \cdot L_2$ à dire que $(cb - ab)z = cd(a+b) - ab(c+d)$ d'où le résultat. $\square$

On applique le lemme précédent et on a les trois égalités suivantes,

$$Z_{A''} = \frac{bc(m-a) + ma(b+c)}{bc+ma}, Z_{B''} = \frac{ac(m-b) + mb(a+c)}{ac+mb}, Z_{C''} = \frac{ab(m-c) + mc(a+b)}{ab+mc}$$

de plus on a aussi,

$$m(bc + ac + ab) - abc = bc(m-a) + ma(b+c) = ac(m-b) + mb(a+c) = ab(m-c) + mc(a+b)$$

il nous reste à montrer que les arguments au dénominateur sont les mêmes modulo π , pour cela on pose $(a, b, c, m) = (e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\zeta}, e^{i\theta})$ par la formule de l'angle moitié on a,

$$bc + ma = e^{i(\beta+\zeta)} + e^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\frac{(\alpha+\beta+\zeta+\theta)}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{\alpha+\theta-\beta-\zeta}{2}\right)$$

par l'égalité précédente on voit que,

$$\arg(bc + ma) \equiv \arg(ac + mb) \equiv \arg(ab + mc), \text{ mod } [\pi]$$

et en conclure que O, A'', B'', C'' sont alignés.

4 Référence

A Géométrie / Michèle Audin

E Géométrie analytique classique / Jean-Denis Eiden

N Agrégation de mathématiques épreuve orale / Ivan Nourdin

* Il faut y penser soi-même