Topologie des classes de similitude

Réf : FGN Alg 2

Thm : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $S(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$

a) M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $S(M)$ est fermé

b) M est nilpotente $\Leftrightarrow$ $0 \in \overline{S(M)}$

dém :

Lemme : Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$ alors $S(M)$ contient M_ε, triangulaire supérieure telle que, $|(M_\varepsilon)_{ij}| \leq \varepsilon$ si $j > i$.

dém : $M \in M_n(\mathbb{C})$: M est trigonalisable. Donc il existe une matrice triang sup dans $S(M)$, on peut donc supposer que M est triang sup.

Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{B}$ la base $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{\rho}, \frac{e_2}{\rho^2}, \dots, \frac{e_n}{\rho^n}\right)$.

Alors $M\left(\frac{e_j}{\rho^j}\right) = \sum_{i=1}^{j} M_{ij} \frac{e_i}{\rho^j} = \sum_{i=1}^{j} M_{ij}\, \rho^{i-j} \frac{e_i}{\rho^i}$

Soit $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ alors $P^{-1} M P = (M_{ij}\, \rho^{i-j})_{i,j \leq n}$

Si $\rho \geq \frac{\max |M_{ij}|}{\varepsilon}$, $\rho \geq 1$, notons $(M_{ij}\, \rho^{i-j}) = M_\varepsilon \in S(M)$

$|M_{ij}\, \rho^{i-j}| \leq \frac{\max |M_{ij}|}{\rho} \leq \varepsilon$ si $j > i$.

et $M_{ij}\, \rho^{i-j} = M_{ii}$ si $i = j$: on ne change pas la diagonale. □

a)

$\Leftarrow$: Soit $(A_{1/k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ construit comme dans le lemme.
Alors les termes diagonaux de $A_{1/k}$ restent constants alors que les termes extra-diagonaux tendent vers 0.

Donc $A_{1/k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} D$ diagonale et comme $S(A)$ est fermé $D \in S(A)$.
Donc A est diagonalisable.

$\Rightarrow$: Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S(A)^{\mathbb{N}}$ telle que $A_k \to B$.

Comme $A_k \in S(A)$ $\chi_{A_k} = \chi_A$ et $\Pi_{A_k} = \Pi_A$.

Alors $\Pi_A(B) = \lim_{k\to+\infty} \Pi_A(A_k) = \lim_{k\to+\infty} \Pi_{A_k}(A_k) = 0$

Donc B est annulé par Π_A, polynôme à racines simples (car A diagonalisable) donc B est diagonalisable.

De plus $\chi_B = \lim \chi_{A_k} = \chi_A$

B et A sont diagonalisables et $\chi_B = \chi_A$ donc A et B ont mêmes valeurs propres comptées avec la multiplicité. Ainsi $B \in S(A)$. et $S(A)$ est fermé.

b)

$\Rightarrow$ Soit $(A_{1/k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ comme dans le lemme.
$A_{1/k} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ car A est nilpotente.

Donc $A_{1/k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $0 \in \overline{S(A)}$.

$\Leftarrow$: Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S(A)^{\mathbb{N}}$ avec $A_k \to 0$. Comme

$N_F \in \mathcal{J}(N)$, $\chi_{N_F} = \chi_N$

$\chi_N = \chi_{N_{F}} = \dots = \chi_0 = X^n$. Donc $\chi_N = X^n$ et N est nilpotente. □