30 Suite récurrente : convergence lente

ref : FGN analyse 1

Théorème 30.1 *Soit f une application définie au voisinage de 0 qui a un développement limité de la forme :*

$$f(x) = x - ax^{\alpha} + o(x^{\alpha})$$

avec $a > 0$ et $\alpha > 1$. Alors la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ admet l'équivalent :

$$u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Preuve. Le développement montre que f est continue en 0 et dérivable en 0. De plus, le développement montre que $0 < f(x) < x$ sur $]0, \eta]$ pour un $\eta < 0$. L'intervalle $[0, \eta]$ est donc stable par f et la suite u_n est bien définie si $u_0 \in [0, \eta]$ et est décroissante. Elle converge donc vers 0 qui est l'unique point fixe de f sur $[0, \eta]$.

Comme $f'(0) = 1$, 0 n'est pas un point fixe attractif (au sens : $|f'(0)| < 1$), en particulier on n'a pas de convergence géométrique. Si u_n convergeait au moins géométriquement (à l'ordre 1), alors $0 \leq u_n \leq k^n$ avec un $k < 1$ pour n assez grand et donc $\frac{f(u_n)}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$ et la dérivée en 0, si elle existe est plus petite que k.

On va utiliser le deuxième terme du développement de Taylor de f pour préciser la vitesse de convergence de (u_n). Pour cela, raisonnons par analogie avec une équation différentielle :

$u_{n+1} - u_n$ s'interprète comme une dérivée discrète $\Delta(u_n)$, on a donc $\Delta(u_n) = -au_n^{\alpha} + o(u_n^{\alpha})$.

Les solutions de $y' = -ay^{\alpha}$ vérifient $y^{1-\alpha} = -a(1-\alpha)t$, donc on s'attend à un équivalent de la forme $u_n \sim C.n^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} &= f(u_n)^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \\
&= (u_n - au_n^{\alpha} + o(u_n^{\alpha}))^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \\
&= u_n^{1-\alpha}(1 - a(1-\alpha)u_n^{\alpha-1} + o(u_n^{\alpha-1})) - u_n^{1-\alpha} \\
&= a(\alpha-1) + o(1)
\end{aligned}$$

La série de terme constant $a(\alpha - 1)$ diverge grossièrement, donc les sommes partielles sont équivalentes :

$$u_n^{1-\alpha} \sim na(\alpha-1)$$

Puis,

$$u_n \sim (na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

□

Application : $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on trouve $u_n \sim \frac{2}{n}$.

En écrivant plus de termes dans le développement de Taylor de f, on trouve des termes supplémentaires dans le développement asymptotique de (u_n) :

Ici, on a $\alpha = 2$, donc l'équation importante est :

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ln(1+u_n)} + \frac{1}{u_n}$$

Développons, le terme de droite à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{4}+o(x^2))-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{x}{12}+o(x)$$

Donc,

$$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1}{2}-\frac{u_n}{12}+o(u_n)$$

Comme $u_n \sim \frac{2}{n}$, la série des u_n diverge et les sommes partielles sont équivalentes :

$$\frac{1}{u_n}=\frac{n}{2}-\frac{\ln n}{12}+o(\ln n)=\frac{n}{2}(1-\frac{\ln n}{6n}+o(\frac{\ln}{n}))$$

Donc,

$$u_n=\frac{2}{n}\frac{1}{1-\frac{\ln n}{6n}}=\frac{2}{n}(1+\frac{\ln n}{6n}+o(\frac{\ln n}{n}))=\frac{2}{n}+\frac{\ln n}{3n^2}+o(\frac{\ln n}{n^2})$$

Leçons concernées : convergence de suite, comportement asymptotique, suite récurrente, $f(x)=0$.