

## 04 : Théorème de la base télescopique et élément algébrique

Référence : Perrin p65

Leçons possibles : 123 141

**Outils :** Famille libre et génératrice en dimension finie, élément algébrique/transcendant, polynôme minimal, théorèmes d'isomorphisme, anneau principal, idéal maximal.

On propose ici de démontrer deux résultats classiques sur les extensions de corps et leur dimension.

### Théorème : Base télescopique

Soient  $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$  des corps.  $(e_i)_{i \in I}$  base de  $\mathbb{L}$  sur  $\mathbb{K}$  et  $(f_i)_{i \in J}$  une base de  $\mathbb{M}$  sur  $\mathbb{L}$ .

La famille  $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est une base de  $\mathbb{M}$  sur  $\mathbb{K}$ .

Montrons déjà que  $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est libre sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $(\lambda_{ij})_{i,j \in I \times J}$  une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$  tels que :  $\sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i f_j = 0$ . On peut séparer la somme :  $\sum_j f_j (\sum_i \lambda_{ij} e_i) = 0$ . Comme  $(f_i)_{i \in J}$  et  $(e_i)_{i \in I}$  sont des bases, on en déduit immédiatement que les  $\lambda_{ij}$  sont nuls. D'où le résultat.

Soit maintenant  $x \in \mathbb{M}$ . On peut l'écrire sous la forme :  $x = \sum_j \mu_j f_j$  avec  $\mu_j \in \mathbb{L}$ .  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $\mathbb{L}$  sur  $\mathbb{K}$ , donc on en déduit :  $x = \sum_i (\sum_j \lambda_{ij} e_i) f_j = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i f_j$  où  $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ . Les  $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$  sont donc bien partie génératrice de  $\mathbb{M}$ . On a démontré le premier théorème.

Le résultat le plus connu issu directement de ce théorème est le suivant :

$$[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{K}]$$

Passons au deuxième résultat :

### Proposition : Caractérisation d'un élément algébrique

Soit  $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$  une extension et soit  $\alpha \in \mathbb{L}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\alpha$  est algébrique sur  $\mathbb{K}$ .
2.  $\mathbb{K}[\alpha]$  est un corps.
3.  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] < +\infty$

Où  $\mathbb{K}[\alpha]$  est le sous-anneau de  $\mathbb{L}$  engendré par  $\mathbb{K} \cup \{\alpha\}$ .

On va prouver les équivalences par étapes : a, b, c, d : 1.  $\xrightarrow{a.}$  2.  $\xrightarrow{b.}$  1.  $\xrightarrow{c.}$  3.  $\xrightarrow{d.}$  1.

On considère  $\phi : \mathbb{K}[T] \rightarrow \mathbb{L}$ , le morphisme d'image  $\mathbb{K}[\alpha]$  qui à tout polynôme associe son évaluation en  $\alpha$  dans  $\mathbb{L}$ .  $\alpha$  est transcendant si et seulement si  $\phi$  est injective ( $\alpha$  est racine d'un polynôme non-nul de  $\mathbb{K}[T]$ ).

a. Supposons  $\alpha$  algébrique et notons  $P$  son polynôme minimal.

Alors, par passage au quotient :  $\mathbb{K}[T]/(P) \simeq \mathbb{K}[\alpha]$ . Où  $(P)$  l'idéal des polynômes annulant  $\alpha$  (qui est engendré par  $P$ ).

$\mathbb{K}[\alpha]$  est sous-anneau d'un corps (intègre), donc il est intègre. Pas définition d'un idéal premier,  $(P)$  est donc premier dans  $\mathbb{K}[T]$ .  $P$  est donc irréductible, ce qui implique que  $(P)$  est maximal (car  $\mathbb{K}[T]$  est un anneau principal).

Comme  $(P)$  est maximal, tout idéal qui contient  $(P)$  est soit  $(P)$ , soit  $\mathbb{K}[T]$ . Ainsi,  $\mathbb{K}[T]/(P)$  est un corps. Donc  $\mathbb{K}[\alpha]$  est un corps par homomorphisme.

b. Réciproquement, si  $\mathbb{K}[\alpha]$  est un corps, on considère  $\phi$  qu'on restreint à l'homomorphisme surjectif naturel de  $\mathbb{K}[T]$  vers  $\mathbb{K}[\alpha]$ . Celui-ci ne peut être injectif (et donc  $\alpha$  ne peut être transcendant), car sinon ce serait un isomorphisme et  $\mathbb{K}[T]$  serait un corps (ce qui n'est pas le cas).

- c. On reconsidère l'isomorphisme  $\mathbb{K}[T]/(P) \simeq \mathbb{K}[\alpha]$ . Si  $P$  est de degré  $n$ , on a par division euclidienne que  $(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$  est une base de  $\mathbb{K}[\alpha]$  sur  $\mathbb{K}$ .  $\mathbb{K}$  est donc de dimension finie, égale au degré du polynôme minimal de  $\alpha$ .
- d. On réutilise l'homomorphisme surjectif issu de  $\phi$ . Comme  $\mathbb{K}[T]$  est de dimension infinie et que  $\mathbb{K}[\alpha]$  est de dimension finie, ce morphisme ne peut pas être injectif et donc  $\alpha$  est algébrique.