27 Théorème ergodique de Von-Neumann

Ref : Beck

THÉORÈME 27.1 *Soit H un espace de Hilbert, T un endomorphisme continu de norme* ≤ 1 *et p est la projection orthogonale sur* $\ker(T - \mathrm{id})$ *(qui est fermé). On pose $T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} T^k$. Alors pour tout $x \in H$,*

$$T_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x)$$

PREUVE. idée : Pour $x \in \ker(T - \mathrm{id})$, le résultat est clair, il suffit donc de regarder ce qu'il se passe sur l'orthogonal de $\ker(T - \mathrm{id})$.

Tout d'abord, $\ker(T - \mathrm{id})$ est fermé car c'est le noyau d'un endomorphisme continu. Par le théorème de projection sur un convexe fermé et ses corollaires, on a la décomposition orthogonale :

$$H = \ker(T - \mathrm{id}) \oplus \ker(T - \mathrm{id})^{\perp}$$

Identifions cet orthogonal, on procède en deux temps :

Tout d'abord, on a toujours pour u continu, $\ker(u)^{\perp} = \overline{\operatorname{im} u^*}$. En effet, on a :

$$x \in \ker u \Leftrightarrow \forall y, < u(x), y >= 0 \Leftrightarrow < x, u^*(y) >= 0 \Leftrightarrow x \in (\operatorname{im} u^*)^{\perp}$$

Puis en passant à l'orthogonal, puisque $F^{\perp\perp} = \overline{F}$, on obtient :

$$\ker(u)^{\perp} = (\operatorname{im} u^*)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{im} u^*}$$

Ensuite, comme $\|T\| \leq 1$, on a aussi : $\ker(T - \mathrm{id}) = \ker(T^* - \mathrm{id})$ qui donne en passant à l'orthogonal, $\overline{\operatorname{im}(T^* - \mathrm{id})} = \overline{\operatorname{im}(T - \mathrm{id})}$. Montrons ce point :

$$Tx = x \Leftrightarrow < Tx, x >= \|x\|^2 \Leftrightarrow < x, T$$

En effet, le sens direct est clair et l'autre sens provient du cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz :

$$\|x\|^2 =< Tx, x >\leq \|T\|\|x\|^2 \leq \|x\|^2$$

Donc, $Tx = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$, et comme $\|T\| \leq 1$, on a $\lambda = 1$.

On a donc montré la décomposition orthogonale :

$$H = \ker(T - \mathrm{id}) \oplus \overline{\operatorname{im}(T - \mathrm{id})}$$

Pour $z = Tx - x$, il y a téléscopage :

$$T_n(z) = \frac{1}{n+1}(T^{n+1}(h) - h) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour $y \in \overline{\operatorname{im}(T - \mathrm{id})}$ et $\epsilon > 0$, $\exists z \in \operatorname{im}(T - \mathrm{id})$ tel que $\|y - z\| \leq \epsilon$, d'où :

$$\|T_n(y)\| \leq \|T_n(y) - T_n(z)\| + \|T_n(z)\| \leq \|T_n\| \; \|y - z\| + \|T_n(z)\| \leq 2\epsilon$$

pour n assez grand. Et on a bien $p(y) = 0$ d'après la décomposition orthogonale.

□

COROLLAIRE 27.2 *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$, alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$,*

$$\frac{1}{n+1}\sum f(. + k\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

Preuve. Soit l'opérateur $T : L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ défini par $T(f)(x) = f(x+\alpha)$. Il est clairement continu de norme 1, cherchons ses vecteurs invariants : Les constantes sont invariantes et réciproquement, si $f(.+\alpha) = f(.)$, cela donne une relation sur les coefficients de Fourier de f : $c_n(f) = e^{in\alpha}c_n(f)$. Comme $e^{in\alpha} \neq 1$ pour tout $n \neq 0$, on a $f = c_0$ qui est bien une constante.

Par le théorème, la somme de Cesaro converge pour tout f vers la projection sur la droite vectorielle des constantes, c'est-à-dire vers $c_0(f)$. $\square$

Leçons concernées : Hilbert, applications linéaires continues.