Réf : Gourdon
Exo III.4.4

Calcul de $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{it} dt$

DEV

Énoncé : Pour $\alpha \in]0,1[$, $J(\alpha) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{it} dt = \Gamma(\alpha) e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$.

D) * **Lemme :** (formule de la moyenne et règle d'Abel) $\longrightarrow$ Doit figurer dans le plan mais est admis car trop long sinon.

- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ positive décroissante C^1. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable continue. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt$.
- Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ positive décroissante C^1 telle que $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} 0$. Soit $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ C^0 telle que $\exists M > 0, \forall x \in [a,b[, \left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq M$. Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

Ici $b = +\infty$ OK !

D) • Soit $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_a^t g(x)dx$ C^1. Soient $m := \min_{[a,b]} G$, $M = \max_{[a,b]} G$.

Il suffit de montrer que $f(a)m \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq f(a)M$ puis d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour G. Or, par IPP on a :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \Big[G(t)f(t)\Big]_a^b - \int_a^b G(t)f'(t)dt = G(b)f(b) - \int_a^b G(t)f'(t)dt.$$

Or, $mf(b) \leq G(b)f(b) \leq Mf(b)$ et $m(f(a)-f(b)) = -m\int_a^b f'(t)dt \leq -\int_a^b G(t)f'(t)dt$
$\leq -M\int_a^b f'(t)dt = M(f(a)-f(b))$.

Donc en sommant : $mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(a)$. Par le TVI, $\exists c \in [a,b]$ tq $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)G(c)$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $f(A) \leq \varepsilon$. Par la formule de la moyenne, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $a \leq x < y < b$, $\exists c \in [x,y]$ tq $\int_x^y f(t)g(t)dt = f(x)\int_x^c g(t)dt$.

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $A \leq x < y$, on a $\left|\int_x^y f(t)g(t)dt\right| \leq f(x)\cdot 2M \leq f(A)\cdot 2M \leq 2\varepsilon M$.

Ainsi pour toute suite $(b_n)_{n\geq 0}$ tq $a \leq b_n < b$, $b_n \longrightarrow b$, la suite $\left(\int_a^{b_n} f(t)g(t)dt\right)_n$ est de Cauchy, donc converge dans $\mathbb{R}$. Cela montre que $\lim_{y\to b} \int_a^y f(t)g(t)dt$ existe (caractérisation séquentielle forte). $\blacksquare$

* Pour $\alpha > 0$, on pose $I(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} t^{\alpha-1} dt$, $x \geq 0$. I est bien définie pour $x \geq 0$.
($t \mapsto e^{-t} t^{\alpha-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$).

La dérivée de l'intégrande est $t \mapsto it e^{-t} e^{ixt} t^{\alpha-1}$, ce qui est dominé indépendamment de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$\forall x \geq 0, \quad I'(x) = i\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} t^{\alpha}$$

Par IPP, on a $I(x) = \left[e^{(-1+ix)t} \cdot \frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_0^{+\infty} - \left(\frac{-1+ix}{\alpha}\right)\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} t^\alpha = -\frac{i+x}{\alpha} I'(x)$.

Par cette équation différentielle, on obtient $I(x) = C\exp\left(-\alpha\left(\frac{1}{2}\log(x^2+1) - i\arctan x\right)\right)$

$$= C(x^2+1)^{-\alpha/2} e^{i\alpha\arctan(x)}$$

vu que $\int \frac{dx}{i+x} = \int \frac{x-i}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) - i\arctan(x) + K$, $K \in \mathbb{C}$.

Comme $I(0) = C = \Gamma(\alpha)$, on a $I(x) = \Gamma(\alpha)(x^2+1)^{-\alpha/2} e^{i\alpha\arctan x}$.

Désormais $0 < \alpha < 1$.

* Par changement de variable $u = xt$, on a $I(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-u/x} e^{iu} u^{\alpha-1} du$, $\forall x > 0$.

Montrons que $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha I(x) = J(x)$. Pour $y \geq 0$, on pose $\widetilde{I}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du$.

Pour $y > 0$, $\widetilde{I}(y)$ existe clairement. L'existence de $\widetilde{I}(0)$ vient de la règle d'Abel, écrire $e^{iu} = \cos u + i\sin u$

appliquée à $f(u) = u^{\alpha-1}$ positive décroissante C^1, $f(u) \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$, $g(u) = \cos(u)$ ou $\sin(u)$ qui vérifie $\left|\int_0^x g(t)dt\right| \leq 2$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{iu} u^{\alpha-1} du$ existe bien. Montrons que $\widetilde{I}$ est continue en 0. Pour cela, on montre

que $\widetilde{I}$ est limite uniforme des fonctions continues $\widetilde{I}_n(y) := \int_{1/n}^{n} e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du$.

* Par la formule de la moyenne, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall y \geq 0$, $\forall X > n$, $\exists a, b \geq n$ tels que

$$\int_n^X e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du = e^{-ny}\left(\int_n^a \cos u\, u^{\alpha-1} du + i\int_n^b \sin u\, u^{\alpha-1} du\right)$$

Donc pour $X > n$, $\left|\int_n^X e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du\right| \leq \sup_{t\geq n}\left|\int_n^t \cos u\, u^{\alpha-1} du\right| + \sup_{t\geq n}\left|\int_n^t \sin u\, u^{\alpha-1} du\right|$

Le majorant ne dépendant plus de X, $\left|\int_n^{+\infty} e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du\right| \leq \sup_{t\geq n}\left|\int_n^t \cos u\, u^{\alpha-1} du\right| + \sup_{t\geq n}\left|\int_n^t \sin u\, u^{\alpha-1} du\right|$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos u/\sin u\, u^{\alpha-1} du$ étant convergentes, les termes de droite tendent vers 0 lorsque

n tend vers $+\infty$, indépendamment de y. De plus, $\left|\int_0^{1/n} e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du\right| \leq \int_0^{1/n} u^{\alpha-1} du \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\widetilde{I}_n \longrightarrow \widetilde{I}$ uniformément : $\widetilde{I}$ est continue (en 0), chaque $\widetilde{I}_n$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$

(continuité sous le signe intégrale). Ainsi $\widetilde{I}(0) = J(\alpha) = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha I(x) = \Gamma(\alpha) e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$. ☒

Appli : $J(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{it} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{is^2} ds$. Donc $\int_0^{+\infty} e^{is^2} ds = \frac{\Gamma(1/2)}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.