25 Générateurs de Isom(E)

ref : maison + FGN algèbre 3

THÉORÈME 25.1 *Soit E un espace affine euclidien de direction $\vec{E}$. Soit $f \in \text{Isom}(E)$, on note $r_f = \text{rg}(\vec{f} - \vec{\text{id}})$ alors*
- *Si f admet un point fixe, elle est le produit de r_f réflexions mais pas moins.*
- *Si f n'a pas de point fixe, elle est le produit de $r_f + 2$ réflexions mais pas moins.*

PREUVE. On va traiter la partie linéaire qui est une isométrie vectorielle de la direction $\vec{E}$ puis utiliser la forme canonique des isométries affines.

Si $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r$ alors $\vec{f} = \vec{\sigma_1} \circ \cdots \circ \vec{\sigma_r}$, on s'intéresse donc au cas vectoriel :

PROPOSITION 25.2 *Toute isométrie vectorielle f d'un espace euclidien E est le produit de $r_f = \text{rg}(f - \text{id})$ réflexions, mais pas moins.*

PREUVE. Si $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r$ où les σ_i sont des réflexions d'hyperplans respectifs H_i. Alors :

$$\bigcap_{i=1}^{r} H_i \subset \ker(f - \text{id})$$

Mais, $\dim \bigcap_{i=1}^{r} H_i \geq n - r$, donc $n - r \leq n - r_f$, puis $r \geq r_f$. Cela montre que l'on ne peut pas faire mieux que le résultat annoncé.

L'existence d'une telle décomposition en produit de r_f réflexions se démontre par récurrence sur r_f.

Si $r_f = 0$, alors f est bien le produit de 0 réflexions (qui, par convention, est l'identité). Si c'est vrai pour $r_f = r \geq 0$, prenons le cas de $r_f = r + 1$ et composons par une réflexion pour augmenter la dimension du sous-espace des vecteurs invariants. On a la décomposition stable :

$$E = \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f - \text{id})^{\perp}$$

Pour $y \in \ker(f - \text{id})^{\perp}$, on a $f(y) \neq y$, et si $H =< f(y) - y >^{\perp}$ est l'hyperplan médiateur de y et $f(y)$, et σ la réflexion par rapport à H alors $\sigma \circ f$ admet le sous-espace $\ker(f - \text{id}) \oplus < y >$ parmi ces vecteurs invariants car $\ker(f - \text{id}) \subset H$, donc par récurrence, c'est un produit de moins de $r_f - 1$ réflexions, on trouve donc que f est produit de r_f réflexions. □

Dans le cas où f a au moins un point fixe, on vectorialise l'espace affine E en un point fixe a, et f s'identifie alors à sa partie linéaire et la proposition donne directement le résultat.

Dans le cas où f n'a pas de point fixe, on peut toujours écrire : $f = t_{\vec{u}} \circ g$ avec g isométrie admettant un point fixe, on compose par une translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ avec A quelconque. Comme on peut écrire une translation comme produit de 2 réflexions, on a l'existence d'une décomposition en produit de $r_f + 2$ réflexions. On cherche à montrer l'optimalité de cette borne. Le raisonnement sur la partie linéaire donne $r \geq r_f$. On peut exclure $r = r_f + 1$ en regardant l'orientation : f et g préservent ou renversent l'orientation en même temps, mais g est produit de r réflexions par le cas précédent, donc f ne peut pas être produit de $r + 1$ réflexions. Il reste à exclure le cas $r = r_f$ pour terminer.

Supposons par l'absurde $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{r_f}$, alors comme précédemment on a :

$$\bigcap_{i=1}^{r_f} \vec{H_i} = \ker(\vec{f} - \vec{\text{id}})$$

En effet, par dimension, c'est maintenant une égalité. Les hyperplans affines sont alors en position générale et leur intersection est non vide. En effet, on peut le voir par exemple par dualité, dans un repère affine, $\cap H_i$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire à n inconnues avec second membre, et de rang r, donc admet un sous-espace affine de dimension $n-r$ de solutions. En particulier $\cap_i H_i$ est non vide, mais $\cap H_i \subset Fix(f)$, et on avait supposé que f n'a pas de point fixe, contradiction. $\square$