Théorème 1. BW $\Leftrightarrow$ BL.

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Montrons que ***X* est précompact** : Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x_0 \in X$, on définit (x_n) par récurrence en prenant x_{n+1} un élément de X qui n'est pas dans $\bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ (boules ouvertes) et le processus s'arrêtera en vertu de BW.

Maintenant, soit (O_i) un recouvrement de X.

Déjà **il existe un $\alpha > 0$ tel que chaque boule $B(x, \alpha)$, pour tout $x \in X$, est contenue entièrement dans un O_i**. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait pour tout $\frac{1}{p}$ un x_p récalcitrant tel que aucun O_i ne contiendrait $B\left(x_p, \frac{1}{p}\right)$, et on aurait un μ (une valeur d'adhérence de (x_p)) contenu dans aucun O_i (sinon cet O_{i_0} contiendrait une boule $B(\mu, \alpha)$ donc, par le jeu de l'inégalité triangulaire, il contiendrait un $B\left(x_p, \frac{1}{p}\right)$). Or, ce μ est dans X.

Ensuite, vu qu'il existe (par précompacité) un nombre fini de $B(x, \alpha)$ recouvrant X, on conclut.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Soit (x_n) une suite dans X, alors l'intersection $\bigcap_n \overline{\{x_p, p \geqslant n\}}$ est non vide par BL (car aucun des fermés n'est vide), donc contient un $a \in X$ qui est donc une valeur d'adhérence de (x_n). $\square$

Proposition 2. *X compact est de Cauchy.*

Démonstration. Puisqu'on a une distance, on utilise BW :

Soit (x_n) de Cauchy. Soit φ et a tels que : $x_{\varphi(n)} \to a$. Soit $\varepsilon > 0$.

Soit n_0 un rang à partir duquel $d(a, x_{\varphi(n)}) \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varphi(n') \geqslant \varphi(n_0)$ un rang à partir duquel $d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$.

Alors pour tout $m \geqslant \varphi(n')$, on a : $d(x_m, a) \leqslant d(x_m, x_{\varphi(n')}) + d(x_{\varphi(n')}, a) \leqslant 2\varepsilon$.

Donc $(x_n) \to a$. $\square$