

Formule des compléments

Ψ est la fonction digamma :

On pose pour tout $x > 0$:

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \quad (1)$$

Ψ est la dérivée logarithmique de la fonction Γ

Remarque 1. On peut aussi écrire :

$$\Psi(x) = \lim_n \left[(H_n - \gamma) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n} \right) \right] \quad (2)$$

1 Expressions sous forme intégrale

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\Psi(x) = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt - \gamma. \quad (3)$$

(démonstration : pour $k > 1$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$ et ensuite dans (2) on passe à la limite en n).

1 GAUSS : calcul exact de $\Psi\left(\frac{p}{q}\right)$

Il s'agit d'établir une formule pour un calcul exact de $\Psi\left(\frac{p}{q}\right)$, utile sans doute pour programmer la fonction Ψ et en approcher les valeurs ensuite par interpolation ?

1. **Application de la formule** $\Psi(x) = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt - \gamma$ à $x = \frac{p}{q}$

Pour tout $\frac{p}{q} \in]0, 1[$, on a : $\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = q \int_0^1 \frac{t^{q-1} - t^{p-1}}{1-t^q} dt - \gamma$.

(démonstration : $\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{p}{q}-1}}{1-t} dt - \gamma$ et on pose $u = t^{\frac{1}{q}}$).

2. Décomposition en poles simples de l'intégrande

$$\frac{t^{q-1} - t^{p-1}}{1-t^q} = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\lambda_k}{t - (\omega_q)^k} \text{ avec } \omega_q = e^{\frac{2i\pi}{q}} \text{ et l'on trouve } \lambda_k = \frac{(\omega_q)^{kp} - 1}{q}.$$

(démonstration : on écrit $\frac{X^{q-1} - X^{p-1}}{1-X^q} = \sum \frac{\lambda_k}{X - (\omega_q)^k}$, puis on multiplie à gauche et à droite par $(X - (\omega_q)^j)$ et on évalue en $(\omega_q)^j$: à gauche ça fait $\frac{X^{q-1} - X^{p-1}}{1-X^q}$, alors on pose $X = Y(\omega_q)^j$ et ensuite, en bas, cela revient à évaluer $\frac{Y^q - 1}{Y - 1}$ en 1 ce qui, par série géométrique, fait q .)

3. Intégration sur $[0, 1]$ de chaque pole

pour tout $\theta \in]0, \pi[$, on a : $\int_0^1 \frac{dt}{t - e^{i\theta}} = \ln 2 + \ln \sin \frac{\theta}{2} + i \frac{\pi - \theta}{2}$.

(démo : $\frac{1}{t - e^{i\theta}} = \frac{t - \cos \theta}{(t - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} + i \frac{\sin \theta}{(t - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}$ et $\int \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \arctan \frac{x}{a}$)

donc $\int_0^1 \frac{dt}{t - (\omega_q)^k} = \ln 2 + \ln \sin \frac{k\pi}{q} + i \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{q} \right)$

donc

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = q \int_0^1 \frac{t^{q-1} - t^{p-1}}{1 - t^q} dt - \gamma$$

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = q \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_k \int_0^1 \frac{dt}{t - (\omega_q)^k} - \gamma$$

$$\boxed{\Psi\left(\frac{p}{q}\right)} = \boxed{\sum_{k=1}^{q-1} ((\omega_q)^{kp} - 1) \left(\ln 2 + \ln \sin \frac{k\pi}{q} + i \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{q} \right) \right) - \gamma}$$