Formule de Gauss

1 Formule de Gauss $\Gamma(x)=\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x}{\binom{x+n}{n}}$

$$\boxed{\Gamma(x)=\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x}{\binom{x+n}{n}},}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\boxed{\begin{array}{rcll}\Gamma(x) & = & \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!\,n^x}{x^{n+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{x}\right)} & \text{version « } k/x \text{ »}\\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} & \text{version « } x+k \text{ »}\\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)} & \text{version « } x/k \text{ ».}\end{array}}$$

Lemme 1. *Posons* $g_n(x)=\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$*, alors* $g_n\overset{\text{CVS}}{\longrightarrow}\Gamma$.

Démonstration. Cela revient à majorer $|g_n(x)-\Gamma(x)|$. Séparons l'intégrale en deux.

* Remarquons déjà que, vu l'inégalité $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^{-t}$, on a :

$$\int_{n/2}^n t^{x-1}\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t\leqslant\int_{n/2}^n t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\to 0.$$

* Ensuite, on va utiliser successivement :

- $0\leqslant x<1\Rightarrow \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{(1-c_x)^2}$ où $c_x\in[0,1[$;
- $x\geqslant 0\Rightarrow 0\geqslant \mathrm{e}^{-x}-1\geqslant -x$.

On a alors :

$$\begin{array}{rcl}g_n(x)-\Gamma(x) & = & \displaystyle\int_0^{n/2} t^{x-1}\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t\\ & = & \displaystyle\int_0^{n/2} t^{x-1}\left[\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t\\ & = & \displaystyle\int_0^{n/2} t^{x-1}\left[\mathrm{e}^{-t-\frac{t^2}{2n}\times\frac{1}{\left(1-c_{t/n}\right)^2}}-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t\\ & = & \displaystyle\int_0^{n/2} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}\times\frac{1}{\left(1-c_{t/n}\right)^2}}-1\right]\mathrm{d}t\\ |g_n(x)-\Gamma(x)| & \leqslant & \displaystyle\int_0^{n/2} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\left|\frac{t^2}{2n}\times\frac{1}{(1-c_{t/n})^2}\right|\mathrm{d}t\\ & \leqslant & \displaystyle\frac{1}{2n}\int_0^{n/2}\frac{t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t}}{(1-c_{t/n})^2}\,\mathrm{d}t.\end{array}$$

On remarquant que sur $\left[0,\frac{n}{2}\right]$, on a $\frac{t}{n}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow c_{t/n}\leqslant\frac{1}{2}$ donc $\int_0^{n/2}\leqslant\frac{\int_0^{+\infty}t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}{n/2}\to 0.$ $\square$

Démonstration. de la formule de Gauss

En intégrant n fois par parties la définition de g_n, on a pour tout $x > 0$:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^n \times \binom{x}{n}} \int_0^n t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t,$$

D'où le résultat. $\square$