23 Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$

ref : Perrin

THÉORÈME 23.1 *Pour $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs.*

idée : Un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ préserve seulement les propriétés algébriques (ordre des éléments, commutation) mais pas les propriétés géométriques liées à l'action naturelle sur $\{1, \dots, n\}$ (décomposition en cycle). Pour des raisons de cardinal, quand $n \neq 6$, les propriétés géométriques seront aussi conservées.

Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$ et on a le lemme suivant :

LEMME 23.2 *Si un automorphisme envoie transpositions sur transpositions, il est intérieur.*

PREUVE. □

Soit Φ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$, comme il envoie classes de conjugaison sur classes de conjugaison, il envoie les transpositions sur une classe de conjugaison constituée d'éléments d'ordre 2. Il faut donc calculer le cardinal des classes de conjugaison pour obtenir une obstruction.

LEMME 23.3 *Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$, elle correspond à une décomposition en cycles à supports disjoints $\{1, \dots, n\} = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$. Dans cette décomposition on note k_i le nombre de cycles de longueur i. Alors :*

$$\mathrm{card}(\mathcal{O}) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}}$$

PREUVE. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit transitivement sur 0 par conjugaison car c'est une orbite de l'action. On peut donc calculer son cardinal en connaissant un stabilisateur via la formule :

$$\mathrm{card}(\mathcal{O}) = \frac{\mathrm{card}(\mathfrak{S}_n)}{\mathrm{card}(\mathrm{Stab})}$$

Les stabilisateurs sont tous conjugués, donc ont même cardinaux. La formule de conjugaison :

$$\sigma(a_1, \dots, a_i)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_i))$$

montre que l'égalité $\sigma\tau\sigma^{-1}$ pour $\tau \in \mathcal{O}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ implique que σ permute les cycles de même longueur et et réalise une permutation cyclique sur chaque chacun. Il y a donc i possibilités pour ces permutations cycliques sur chaque cycle de longueur i et on a k_i tels cycles, d'où :

$$\mathrm{card}(\mathrm{Stab}) = \prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}$$

Puis,

$$\mathrm{card}(\mathcal{O}) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}}$$

Les classes de conjugaison constituées d'éléments d'ordre 2 sont les classes de produits de k transpositions. D'après le lemme si φ n'est pas intérieur, on doit avoir égalité pour un certain $k \geq 2$ (donc si $n \geq 4$) du cardinal des transpositions et de celui des produits de k transpositions :

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$$

Manipulons cette égalité pour lui faire cracher $n = 6$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{2} = \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} &\Leftrightarrow (n-2)! = 2^{k-1}k!(n-2k)! \\ &\Leftrightarrow \frac{(n-2)!}{2^{k-1}k!(n-2k)!} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\binom{n-2}{2k-2}(2k-2)!}{2^{k-1}k!} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\binom{n-2}{2k-2}(2k-3)(2k-5)\dots 1}{k} = 1\end{aligned}$$

Cette dernière égalité parait difficile à réaliser pour k grand, en effet : si $k > 3$, alors $(2k-3) > k$ et l'inégalité ci-dessus est fausse.

Reste à examiner les cas $k = 2$ ou 3.

Pour $k = 2$, l'égalité est équivalente à :

$$\frac{\binom{n-2}{2}}{2} = 1 \Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 4$$

qui est impossible car deux entiers consécutifs ne peuvent pas être pairs tous les deux.

Pour $k = 3$, on trouve la condition :

$$\binom{n-2}{4} = 1$$

qui implique $n = 6$.

$\square$

Leçons concernées : actions de groupe, groupe de permutations, partie génératrice de groupe, groupe fini, dénombrement.