Fonction Gamma

Table des matières

Bibliographie :

- Groux, Soulat, *Les fonctions spéciales vues par les problèmes*, 517.5

1. PRÉSENTATION

1.1. Définition et premières propriétés

On pose pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Γ est **bien définie** :
   - pour $t \to 0$, c'est Riemann ;
   - pour la borne $+\infty$ de l'intégrale, $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \underbrace{t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t/2}}_{\text{de limite } 0} \times \mathrm{e}^{-t/2} = O(\mathrm{e}^{-t/2})$.
2. Γ est **continue** dans $]0;+\infty[$.

   Soit $n \geqslant 1$, montrons que Γ est continue sur $x \in \left[\frac{1}{n}, n\right]$.

   Il suffit de majorer $|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}|$: on prend $h(t) = \begin{cases} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{pour } t \in [1;+\infty[\\ t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{pour } t \in [0,1] \end{cases}$.
3. Γ est **dérivable** dans $]0;+\infty[$ et :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t \times t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   Soit $n \geqslant 1$, dominons l'intégrande sur $x \in \left[\frac{1}{n}, n\right]$.

   Il suffit de majorer $|\ln t \cdot t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}|$: on prend $h(t) = \begin{cases} \ln t \cdot t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{pour } t \in [1;+\infty[\\ \ln t \cdot t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{pour } t \in [0,1] \end{cases}$.

   En $+\infty$, h est intégrable car $\ln t \cdot t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t/2}$ est bornée puisque de limite nulle.
   En 0, h est intégrable car équivalente à du $\ln t \cdot t^{\alpha}$ avec $\alpha > -1$ (Bertrand).
4. Γ est $\boldsymbol{C^\infty}$ dans $]0;+\infty[$ et :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k \times t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

   Soit $n \geqslant 1$, dominons l'intégrande sur $x \in \left[\frac{1}{n}, n\right]$.

   Il suffit de majorer $|(\ln t)^k \cdot t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}|$: on prend $h(t) = \begin{cases} (\ln t)^k \cdot t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{pour } t \in [1;+\infty[\\ (\ln t)^k \cdot t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{pour } t \in [0,1] \end{cases}$.

   En $+\infty$, h est intégrable car $(\ln t)^k \cdot t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t/2}$ est bornée puisque de limite nulle.
   En 0, h est intégrable car équivalente à du $\ln^k t \cdot t^{\alpha}$ avec $\alpha > -1$ (Bertrand).
5. **Convexité :**

   a. D'après (1), on a $\Gamma''(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$ d'où la convexité de Γ.

   b. Pour la convexité de $\ln\Gamma$, on peut remarquer que $\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' = \frac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$, ce qui est >0 par Cauchy-Schwartz (bon exo).
   Voir une autre preuve en 2.6.
6. **Limites** :

   On a $\Gamma(x) \geqslant \int_0^2 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant \mathrm{e}^{-a} \times \frac{2^x}{x}$. Ceci donne immédiatement $\lim\limits_{0} \Gamma = \lim\limits_{+\infty} \Gamma = +\infty$.
   Par stricte convexité de Γ, on a alors l'existence d'un unique minimum :

x	0	α	$+\infty$
Γ	$\searrow$	$f(\alpha) > 0$	$\nearrow$
7.

1.2. Relation de récurrence $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ (pour tout $x > 0$)

Démonstration. En intégrant par parties. □

Application.

1) On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$.

2) On en déduit que pour $x \to 0$, on a $\boxed{\Gamma(x) \sim \frac{\Gamma(1+x)}{x} \sim \frac{1}{x}}$.

1.3. Stirling généralisée

On a pour $x \to +\infty$:

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x.$$

Démonstration. □

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition, $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.
Effectuons le changement de variable $s := \frac{t-x}{\sqrt{x}}$. On a alors : $t = s\sqrt{x}+x$ et $dt = \sqrt{x}ds$.
On obtient :

$$\Gamma(x+1) = \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} (s\sqrt{x}+x)^x e^{-s\sqrt{x}-x}\sqrt{x}ds$$

D'où l'on déduit :

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(\frac{s}{\sqrt{x}}+1\right)^x e^{-s\sqrt{x}}ds = \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}}ds$$

Posons $\varphi(x,s) := x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$ pour tout $(x;s) \in]0;+\infty[\times]-\sqrt{x};+\infty[$. Démontrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x;s)}ds = \sqrt{2\pi}$.

1. Soit $s \in]-\sqrt{x};0]$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $u \in]-1;0]$, on a :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}\frac{2}{(1+t)^3}dt$$

Or, $\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}\frac{2}{(1+t)^3}dt \leqslant 0$. D'où : $\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2} \leqslant 0$. Appliquons cette inégalité pour $u = \frac{s}{\sqrt{x}}$: $\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \frac{s}{\sqrt{x}} + \frac{s^2}{2x} \leqslant 0$.
En multipliant les deux membres par x, on obtient : $x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x} \leqslant -\frac{s^2}{2}$ soit $\varphi(x;s) \leqslant -\frac{s^2}{2}$.
De plus, $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x;s) = -\frac{s^2}{2}$.

2. Formule de Gauss et ses applications

2.1. Formule de Gauss $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x}{\binom{x+n}{n}}$

$$\boxed{\Gamma(x) = \frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x}{\binom{x+n}{n}},}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x^{n+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{x}\right)} \text{ version « } k/x \text{ »}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} \text{ version « } x+k \text{ »}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \text{ version « } x/k \text{ ».}\end{aligned}$$

LEMME 1. *Posons* $g_n(x)=\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$, *alors* $g_n \xrightarrow{\text{CVS}} \Gamma$.

Démonstration. Cela revient à majorer $|g_n(x)-\Gamma(x)|$. Séparons l'intégrale en deux.
* Remarquons déjà que, vu l'inégalité $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, on a :

$$\int_{n/2}^n t^{x-1}\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t \leqslant \int_{n/2}^n t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \to 0.$$

* Ensuite, on va utiliser successivement :

- $0\leqslant x<1 \Rightarrow \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{(1-c_x)^2}$ où $c_x\in[0,1[$;
- $x\geqslant 0 \Rightarrow 0\geqslant \mathrm{e}^{-x}-1\geqslant -x$.

On a alors :

$$\begin{aligned}g_n(x)-\Gamma(x) &= \int_0^{n/2} t^{x-1}\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{n/2} t^{x-1}\left[\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{n/2} t^{x-1}\left[\mathrm{e}^{-t-\frac{t^2}{2n}\times\frac{1}{\left(1-c_{t/n}\right)^2}}-\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{n/2} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}\times\frac{1}{\left(1-c_{t/n}\right)^2}}-1\right]\mathrm{d}t\\ |g_n(x)-\Gamma(x)| &\leqslant \int_0^{n/2} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\left|\frac{t^2}{2n}\times\frac{1}{(1-c_{t/n})^2}\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{2n}\int_0^{n/2}\frac{t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t}}{(1-c_{t/n})^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On remarquant que sur $\left[0,\frac{n}{2}\right]$, on a $\frac{t}{n}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow c_{t/n}\leqslant\frac{1}{2}$ donc $\int_0^{n/2}\leqslant\frac{\int_0^{+\infty}t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}{n/2}\to 0$. □

Démonstration. de la formule de Gauss

En intégrant n fois par parties la définition de g_n, on a pour tout $x>0$:

$$g_n(x)=\frac{1}{n^n\times\binom{x}{n}}\int_0^n t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t,$$

D'où le résultat. □

2.2. Formule des compléments : $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ (pour $0<x<1$)

Démonstration. On part du produit eulérien (voir feuille sur les produits infinis, dossier `Suites_series_produits`)

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)=\lim_n\frac{\prod_{k=1}^n(k-z)(k+z)}{(n!)^2}=\lim_n\frac{(1-z)\ldots(n-z)\times(1+z)\ldots(n+z)}{(n!)^2},$$

que l'on compare à la formule de Gauss version « $x+k$ » (paragraphe 2.1). □

Applications.

1) Ceci permet de calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ et donc, par un changement de variable, d'avoir l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2) De plus, par récurrence :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-1-\frac{1}{2}\right)\times\ldots\times\frac{1}{2}=\frac{(2n)!}{4^n\times n!}\sqrt{\pi}.$$

2.3. Formule de duplication : $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{\pi}}{4^x}\,\Gamma(2x)$

Démonstration. Principe du calcul (sans difficulté particulière) :

1. On écrit la formule de Gauss version « $x+k$ » pour $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$;
2. on l'écrit aussi pour $\Gamma(2x)$ mais en utilisant en remplaçant n par $2n+1$;
3. on utilise l'équivalent de Stirling pour $n!$. □

2.4. Formule de Weierstrass : $\dfrac{1}{\Gamma(x)}=x\,\mathrm{e}^{\gamma x}\prod\limits_{n\geqslant 1}\mathrm{e}^{-x/n}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$

γ est la constante d'Euler.

Démonstration. On part de la formule de Gauss version « $x\,/\,k$ », on utilise $\ln n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma-o(1)$ et on a tout de suite le résultat. □

Application. Cette formule permet de prolonger Γ sur $\mathbb{C}$.

2.5. Dérivée logarithmique $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\dfrac{1}{x}-\gamma+\sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x+n}\right)$

Démonstration. On prend le ln dans Weierstrass :
$-\ln\Gamma(x)=\ln x+\gamma x+\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(-\frac{x}{n}+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$, puis on dérive.

Pour avoir le droit de dériver sous la $\sum$, on s'assure que la série des dérivées $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)$ converge normalement, or c'est le cas puisque $\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}=\frac{x}{n(x+n)}\leqslant\frac{x}{n^2}$ donc la CV est normale sur tout compact. □

Remarque 2. On peut aussi l'écrire :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\lim_n\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+n}\right)\right].$$

Applications.

Expression intégrale de γ : en prenant $x=1$, on a $\boxed{\Gamma'(1)=-\gamma=\int_0^{+\infty}\ln t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$

Fonction digamma : on a $\Psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, voir le fichier `digamma` qui lui est consacré.

2.6. Formule $\left(\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)'=\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(x+n)^2}$

Démonstration. On dérive la précédente en soulignant que la série des dérivées converge normalement sur $[0,+\infty[$, car $\frac{1}{(x+n)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$. □

Applications.

1. $\ln \Gamma$ est donc convexe dans $]0;+\infty[$.
2. $\lim\limits_{0^+} \dfrac{\Gamma'}{\Gamma} = -\infty$ car $\sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}\right)$ converge normalement sur tout $[0,\ K]$ puisque $0 \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n} \leqslant \dfrac{x}{n^2}$ et donc cette série est une grandeur continue en $x=0$.
3. Γ' s'annule forcément quelque part dans $]0;+\infty[$ (sinon contradiction avec $\Gamma(n)=(n-1)!$) et donc prend le signe $-0+$ (par convexité de $\ln\Gamma$) .

   Ainsi, les variations de Γ sont :

x	0	α	$+\infty$
Γ	$\searrow$		$\nearrow$

3. Prolongement sur $\mathbb{C}$

Voir un récapitulatif dans le livre de Groux cité plus haut.

4. Calcul de certaines valeurs de $\Gamma(x)$

$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$ a été calculé sous-section 2.2 par la formule des compléments : $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \cdots$.

Or, on peut retrouver cette valeur directement.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ (simple changement de variable)}\\
\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ (Fubini)}\\
&= \pi \text{ (passage en polaires).}
\end{aligned}$$