Développement d'Algèbre
Théorème de Burnside

Leçons possibles : 104 (Gpes finis Applicat°s) 105 (Gpes de permutations) 157 (Endo. Trigo)

Th. : Un sgpe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (ie tq $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $A^N = Id$ pour tout A du gpe) est fini. (ou sur $\mathbb{K}$ clos et de caract. 0)

Lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $Tr(A^k) = 0$. Alors A est nilpotente
car$(\mathbb{K}) = 0$

On se place sur un corps de factorisation de $X^N - 1$ dans lequel ce polynôme annulateur de A est scindé.
Il en va alors de même de son polynôme minimal qui le divise et donc A y est trigonalisable.
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses v. propres distincts et $m_1, \dots, m_r$ leur degré de multiplicité respectif.
On a donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_r m_r = 0 \\ \lambda_1^2 m_1 + \dots + \lambda_r^2 m_r = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^r m_1 + \dots + \lambda_r^r m_r = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène ne peut avoir que la solution triviale puisque les m_i sont strictement positifs et car$(\mathbb{K}) = 0$.
Donc son déterminant est forcément nul.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_r \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

On reconnaît le déterminant de Van der Monde $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$ qui est ici non nul par définition des λ_i qui sont distincts.

Donc $\exists i$ tq $\lambda_i = 0$. Prenons $\lambda_1 = 0$

Supposons que $r > 1$, alors, en se limitant aux $r-1$ équations et en tenant compte de $\lambda_1 = 0$ on a :

$$\begin{cases} \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_r m_r = 0 \\ \lambda_2^{r-1} m_2 + \ldots + \lambda_r^{r-1} m_r = 0 \end{cases}$$

et par le même raisonnement on aboutit à la nullité d'un des $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ce qui est exclu.

C'est donc que $\lambda_1 = 0$ et $m_1 = n$ (et ceci vaut dans $\mathbb{K}$).

Donc le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = X^n$

et de ce fait A est nilpotente

CQFD

Dém du Th :

Considérons $f : \begin{vmatrix} G \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ A \longmapsto (\mathrm{Tr}(AM_i))_{i \in [1,m]} \end{vmatrix}$

Sq $\forall A \in G$ $A^n = I$ et G groupe.

avec $(M_i)_{1 \leq i \leq m}$ base de $\mathrm{Vect}(G)$. Sq $f(A) = f(B)$ et mq $(AB^{-1} - I)$ est nilpotente. Soit $M = \sum m_i M_i$ $(M \in \mathrm{Vect}(G))$

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(A \textstyle\sum m_i M_i) = \sum_i m_i \mathrm{Tr}(AM_i) = \sum_i m_i \mathrm{Tr}(BM_i)$$

$$= \mathrm{Tr}(\textstyle\sum m_i BM_i) = \mathrm{Tr}(B(\sum m_i M_i)) = \mathrm{Tr}(BM)$$

Posons $D = AB^{-1}$

$\mathrm{Tr}\, D = \mathrm{Tr}(AB^{-1}) = \mathrm{Tr}(BB^{-1}) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$

Plus généralement, $\mathrm{Tr}(D^k) = \mathrm{Tr}(AB^{-1}D^{k-1}) = \mathrm{Tr}(BB^{-1}D^{k-1}) = n$

$$(D-I)^K = \sum_{k=0}^{K} \binom{K}{k} D^k (-1)^k$$

Donc $\mathrm{Tr}((D-I)^K) = n \sum_{k=0}^{K} \binom{K}{k} (-1)^k = n(1-1)^K = 0$

D'après le lemme, $\underline{AB^{-1} - I_n \text{ est nilpotente}}$

Soit $A \in G$.

$X^N - I$ est un polynôme annulateur scindé et à racines simples. Donc π_A le sera a fortiori et A est diagonalisable.

Sq $A, B \in G$ avec $f(A) = f(B)$

Donc D est diagonalisable en tant qu'élt de G.

Donc $D - I$ est diagonalisable car D et I commutent.

Or $D - I$ est aussi nilpotente, donc $D = I$

et $A = B$. Donc f est injective.

Or l'image par f de G est finie.

En effet, chaque composante ne peut que prendre une valeur parmi les sommes à n termes puisés dans les racines $N^{ièmes}$ de l'unité.

Donc $Card(G) \leq (N)^{n\cdots} \in \mathbb{N}$