

2) (Démonstration du lemme)

• Clairement, A_n est la réunion disjointe de 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} , d'extrémités les $4 = 2^2$ points

$$0 = \frac{0}{3} + \frac{0}{3}, \quad \frac{1}{3} = \frac{0}{3} + \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3}, \quad 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}.$$

• Supposons la propriété vraie au rang n .

Par l'opération $A_{n+1} = \frac{A_n}{3} \cup \frac{2+A_n}{3}$, l'un des 2^n intervalles fermés

$$I = \left[\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k}, \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \right], \text{ où } (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{0, 2\}^n \text{ est fixée, constituant}$$

$$A_n \text{ est transformé en } \left[\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^{k+1}}, \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right] \cup \left[\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^{k+1}} + \frac{2}{3}, \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^{k+1}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3^{n+1}} \right].$$

Ces deux intervalles se ré-écrivent, en posant $y_1 = 0$, $z_1 = 2$ et $y_k = z_k = x_{k-1}$ pour $k \geq 2$, sous la forme

$$\left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{y_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{y_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}} \right] \cup \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{z_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{z_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}} \right]$$

et sont donc bien de la forme désirée. Ils sont disjoints et inclus dans I .

Les 2^n intervalles fermés I étant disjoints, les $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ nouveaux intervalles fermés obtenus de la sorte le sont aussi. Ils sont de longueur $3^{-(n+1)}$, et

tous les réels de la forme $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon}{3^{n+1}}$ où $(x_k) \in \{0, 2\}^{n+1}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$

sont atteints.

• Il s'ensuit que $A_{n+1} \subset A_n$. De plus, comme $\frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}$, toute extrémité d'un segment de A_n est extrémité d'un segment de A_{n+1} . Donc $\bigcap A_{n+1} \supset \bigcap A_n$.

Enfin, puisque $\lambda(A_n) < +\infty$, $\lambda(K) = \lambda(\bigcap_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

NB : L'ensemble de Cantor permet de créer une partie de $[0,1]$ non borélienne mais Lebesgue-mesurable (donc dans la tribu borélienne complétée). Il permet également de construire des fonctions Riemann-intégrables mais non boréliennes (ie non mesurables pour la tribu borélienne). Voir Brianne-Pagès, Analyse, théorie de l'intégration, pages 284-285.