22 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est simple

ref : FGN algèbre 3

THÉORÈME 22.1 *Le groupe* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *est simple.*

PREUVE. idée : On va utiliser de façon cruciale une partie génératrice de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$: les renversements (= rotations d'angle π, en dimension 3), ainsi que la connexité de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ (conséquence de la connexité par arcs : on relie une rotation à l'identité en diminuant son angle jusqu'à 0.)

Les renversements sont tous conjugués car $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ agit transitivement sur les axes et une conjugaison envoie l'axe d'une rotation sur l'axe de le rotation conjuguée.

La fonction $\theta : \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to [0,\pi]$ est continue, on peut l'exprimer analytiquement comme $\theta(g) = \cos^{-1}(\frac{\operatorname{tr} g - 1}{2})$.

Si H est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ et $H \neq \mathrm{id}$. Il suffit de montrer que H contient un renversement pour en déduire que c'est $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ tout entier. La première chose à remarquer est que l'on peut se ramener à H connexe en regardant H^0, la composante connexe de id dans H, qui est elle aussi distinguée et non réduite à id. En effet, :

H^0 est un sous-groupe de H car l'application

$$H^0 \times H^0 \to H : (g,h) \mapsto gh^{-1}$$

est continue ; son image est un connexe de H contenant id, donc est incluse dans H^0.

H^0 est distingué dans $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ car l'application

$$H^0 \times \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to H : (g,h) = hgh^{-1}$$

est continue ; son image est un connexe de H contenant id, donc est incluse dans H^0.

Les composantes connexes de chaque éléments de H dans H diffèrent d'un homéomorphisme global de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ donné par l'action par translation dans le groupe. Il suffit donc de montrer que la composant connexe de $h \in H$, $h \neq \mathrm{id}$ dans H est non réduite à h. Pour cela prenons une rotation $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ qui ne préserve pas l'axe Δ de h. Alors ghg^{-1} est d'axe $g(\Delta) \neq \Delta$, $ghg^{-1} \in H$ car H distingué et enfin enjoignant g à id, on voit que ghg^{-1} est dans la composante connexe de h dans H.

Finalement, H^0 est un sous-groupe distingué, connexe, on réduit à id, de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Montrons qu'un tel sous-groupe contient nécessairement un renversement et on aura terminé.

Revenons à la fonction angle : $\theta(H^0)$ est un connexe de $[0,\pi]$ contenant 0 et non réduit à $\{0\}$, c'est donc un intervalle qui contient en tout cas $[0,\alpha[$ pour $\alpha > 0$ assez petit. En particulier, il existe une rotation ρ d'angle π/n pour $n > \frac{\pi}{\alpha}$ dans le groupe H^0, ainsi ρ^n est bien un renversement contenu dans H^0. $\square$

Leçons concernées : connexité, sous-groupes distingués, endomorphismes remarquables d'un espace euclidien, parties génératrices de groupe.