

Lemme de Morse

jojo

Août 2018

1 Développement

Ce développement est tiré de [1].

Recasages. 214-215-218-158-(171)

Lemme 1. Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible, il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$, tel que pour tout $A \in V$, $\exists! M(A)$ inversible tel que

$$A = {}^t M(A) A_0 M(A) \quad (1)$$

De plus $A \rightarrow M(A)$ est de classe C^1 .

Démonstration. On peut reformuler le lemme en disant que l'on cherche en fait à inverser localement l'application

$$\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R}) \quad (2)$$

Donnée par $\phi(M) = {}^t M A_0 M$. On voudrait inverser cette fonction grâce au TIL on doit voir si les bonnes hypothèses sur la différentielle sont vérifiées. Pour toute matrice H on a

$$\phi(I + H) - \phi(I) = {}^t (A_0 H) + A_0 H + o(\|H\|^2) \quad (\text{On prend une norme subordonnée}) \quad (3)$$

il vient donc

$$D\phi(I)(H) = {}^t (A_0 H) + (A_0 H) \quad (4)$$

Le TIL ne peut donc s'appliquer ici puisque la différentielle n'est pas bijective son noyau est $A_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, donc comme la différentielle est à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, et par la formule du rang $\dim(\text{Im}(D\phi(I))) = \frac{n(n+1)}{2}$, la différentielle est bien surjective. Pour appliquer le TIL on doit donc restreindre ϕ à un supplémentaire du noyau de la différentielle. Soit donc $F = A_0^{-1} S_n(\mathbb{R})$, F est bien un supplémentaire du noyau décrit ci dessus. Soit donc

$$\psi : F \rightarrow S_n(\mathbb{R}) \quad (5)$$

la restriction de ϕ à F . Et $D_\psi(I)$ est la restriction de $D_\phi(I)$ à F , est donc bijective. Alors le TIL donne l'existence d'un voisinage U de I dans F , que l'on peut supposer inclus dans l'ensemble des matrices inversibles, tel que ψ est un C^1 -difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$. V est donc un voisinage de $A_0 = \phi(I) = \psi(I)$ dans $S_n(\mathbb{R})$, et pour tout A dans V , il existe une unique matrice $M \in U$ telle que $A = {}^t M A_0 M$, on M est C^1 -dépendante de A .

Remarque 1. Attention ! U est un ouvert de F que l'on peut supposer inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$, mais F n'est pas un ouvert de $GL_n(\mathbb{R})$. C'est un ouvert pour la topologie induite sur F , les ouverts pour la topologie induite ne sont pas nécessairement ouverts pour la topologie de départ : penser par exemple aux ouverts de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas ouverts dans $\mathbb{R}^2$.

□

Théorème 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. Et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . On suppose que $D_f(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $D_f^2(0)$ est non-dégénérée de signature $(p, n-p)$. Il existe un difféomorphisme $x \rightarrow u = \varphi(x)$, entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 , tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad (6)$$

Démonstration. La formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral donne

$$f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x \quad (7)$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique donnée par

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t) D_f^2(tx) dt \quad (8)$$

est une fonction C^1 de x , puisque par le thm de dérivation des IàP toutes les dérivées partielles existent et sont continues. Donc d'après le lemme il existe $M(x)$, C^1 -dépendante de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, telle que

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x) \quad (9)$$

et donc

$$f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y, \quad y = M(x) x \quad (10)$$

Or $Q(0) = \frac{1}{2} D_f^2(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc il existe un changement linéaire de coordonnées $y = Au$, avec A inversible, tel que

$${}^t y Q(0) y = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad (11)$$

On a donc donné à f l'expression voulue. Reste à montrer que notre changement de variables (ou plutôt la composée de nos deux changements de variables), est C^1 . On veut donc montrer que $\phi : x \rightarrow u = A^{-1} M(x) x$ est un C^1 -difféomorphisme local entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Or comme $M : x \rightarrow M(x)$ est de classe C^1 au voisinage de 0 on peut écrire son DL à l'ordre 1

$$M(x) = M(0) + D_M(0)(x) + o(\|x\|) \quad (x \rightarrow 0) \quad (12)$$

En substituant M par son DL dans l'expression de $\phi(x)$ on trouve

$$\begin{aligned} \phi(x) &= A^{-1}(M(0) + D_M(0).x + o(\|x\|))x \\ &= A^{-1}M(0)x + A^{-1}(D_M(0).x).x + A^{-1}M(0)o(\|x\|).x \\ &= 0 + A^{-1}M(0)x + o(\|x\|) \end{aligned} \quad (13)$$

Comme la matrice $A^{-1}M(0)$ est inversible on conclut grâce au TIL. $\square$