16 Théorème de Cauchy-Peano

ref : Demailly

THÉORÈME 16.1 *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs continu sur U. Alors en tout point y_0, il existe $T > 0$ et une solution définie sur $[-T, T]$ qui passe par y_0 en $t = 0$.*

PREUVE.
On va construire des solutions approchées en suivant le schéma d'Euler explicite. En prenant des pas de temps de plus en plus petit, on aura une suite de solutions approchées dont on pourra extraire une sous-suite convergente par Ascoli.
Cylindre de sécurité :
X est continu en y_0, donc bornée au voisinage de x_0. Soit $M > 0$ et $r > 0$ tel que $\|X(x)\| \leq M$ pour $x \in B = \overline{B}(y_0, r)$. Posons $T = \frac{r}{M}$, alors moralement les solutions qui partent de y_0 reste dans la boule B pour $|t| \leq T$. On précisera cela dans le cas des solutions approchées que l'on va construire maintenant.
Construction de solutions approchées par schéma d'Euler explicite :
On prend pour $N > 0$, le pas de temps $h = \frac{T}{N}$ et on construit par récurrence la suite $(y_i)_{i=0...N}$ en posant :

$$y_0 = y_0 \text{ et } y_i = y_{i-1} + hX(y_{i-1}) \text{ pour } i = 1...N$$

On définit ensuite la fonction $y : [0, T] \to U$ affine par morceaux vérifiant $y(\frac{i}{N}) = y_i$.
La fonction y reste dans la boule B. Montrons le par récurrence :

$$\forall i \in \{0, \ldots, N\}, \|y_i - y_0\| \leq \frac{ir}{N}$$

C'est clair pour 0, si c'est vrai pour i, on écrit :

$$\|y_{i+1} - y_0\| \leq \|y_{i+1} - y_i\| + \|y_i - y_0\| \leq \|X(y_i)\|h + \frac{ir}{N} \leq \frac{(i+1)r}{N}$$

Cela prouve par récurrence que $y(t) \in B(y_0, r)$, $\forall t \in [0, T]$.
Montrons maintenant que y est M-lipschitzienne.
En effet, pour $0 \leq t \leq t' \leq T$, il existe $i \leq j$ tel que $(i-1)h < t \leq ih \leq jh \leq t' < (j+1)h$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\|y(t) - y(t')\| &\leq \|y(t) - y_i\| + \|y_i - y_{i+1}\| + ... + \|y_j - y(t')\| \\
&\leq M(ih - t) + M((i+1)h - ih) + ... + M(t' - jh) \\
&= M(t' - t)
\end{aligned}$$

En particulier pour $t = 0$ et $t' \in [0, T]$, on a $y(t') \in B$.
Convergence des solutions approchées :
On pose $\omega_X(\eta) = \sup\{\|X(y) - X(y')\| \quad | \quad y, y' \in B \text{ et } \|y - y'\| \leq \eta\}$ la module de continuité du champ X. Par le théorème de Heine, X est uniformément continue sur B qui est compacte, donc $\omega_X(\eta) \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Montrons l'estimation, pour $t \geq 0$:

$$\|y(t) - (y_0 + \int_0^t X(y(s))\mathrm{d}s)\| \leq \omega_X(Mh)t$$

Il existe i tel que $ih \leq t < (i+1)h$, découpons alors :

$$\begin{aligned}\|y(t)-(y_0+\int_0^t X(y(s))\mathrm{d}s)\| &\leq \|y(t)-y(ih)-\int_{ih}^t X(y(s))\mathrm{d}s\| + ...\\ &+\|y(ih)-y((i-1)h)-\int_{(i-1)h}^{ih} X(y(s))\mathrm{d}s\|\\ &+ ... + \|y(h)-y_0-\int_0^h X(y(s))\mathrm{d}s\|\\ &\leq \omega_X(hM)(t-ih) + ... + \omega_X(hM)(ih-(i-1)h) + ... + \omega_X(hM)h\\ &\leq \omega_X(hM)t\end{aligned}$$

Extraction par compacité :

Pour N variant, on obtient une suite de fonctions (y_N) de $[0,T]$ dans B, qui est équilipschitzienne et va d'un compact dans un autre. Donc par le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite de $y_{\varphi(n)}$ qui converge uniformément vers une fonction continue y. On peut passer à la limite dans l'estimation précédente, par convergence uniforme pour obtenir pour tout $t \in [0,T]$:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t X(y(s))\mathrm{d}s$$

En dérivant, on obtient que y est solution de l'équation différentielle.

On construit de même une solution sur $[-T,0]$ et elles se recollent en une solution sur $[-T,T]$ car les dérivées à droite et à gauche en 0 coïncident avec $X(y_0)$. $\square$

Remarque : On peut supposer le champ autonome quitte à considérer le champ $\tilde{X}(t,x) = (1, X(t,x))$ qui est autonome sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ avec la même régularité (continue). Pour Cauchy-Lipschitz, le champ non autonome est plus général car on peut faire une hypothèse de régularité plus faible par rapport au temps que par rapport à la variable d'espace.

Leçons concernées : compacité, equa diff etudes qualitatives, méthodes approchées intégrale equa diff, suites et séries de fonctions.