

12 Théorème de Morgenstern

THÉORÈME 12.1 *L'espace $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$, muni de la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées, contient un G_δ dense de fonctions analytiques nulle part*

ref : Dugundji PREUVE. On définit sur $\mathcal{C}^\infty$ la distance :

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \min(2^{-n}, \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty)$$

Cela fait de $\mathcal{C}^\infty$ un espace métrique complet.

Si une fonction $\mathcal{C}^\infty$ est analytique en un point a alors sa série de Taylor au point a a un rayon de convergence non nul, c'est-à-dire d'après la règle de Hadamard, $\sup_k \sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}} < \infty$. Il faut montrer que cette inégalité est rarement vérifiée, posons alors, pour $a \in [0, 1]$ et $c \in \mathbb{N}$:

$$T(a, c) = \{f \in \mathcal{C}^\infty \mid \forall k \geq 0, |f^{(k)}(a)| \leq k!c^k\}$$

Comme une fonction analytique en a l'est aussi sur un voisinage de a , elle est dans l'un des $T(a, c)$ pour $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Chaque $T(a, c)$ est fermé car les conditions sont fermées pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$. Si $T(a, c)$ est d'intérieur vide, alors l'ensemble des fonctions analytiques quelque part est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide, qui est d'intérieur vide par le théorème de Baire ($\mathcal{C}^\infty$ étant complet). Par passage au complémentaire, l'ensemble des fonctions analytiques nulle part contient alors un G_δ dense. Il reste donc à montrer que $T(a, c)$ est d'intérieur vide. Prenons $f \in T(a, c)$, $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $b > 2$ et posons :

$$s(x) = f(x) + \epsilon b^{-n} \cos(b(x - a))$$

Il faut choisir les paramètres pour que s soit proche de f au sens de la distance d et pour que s ne vérifie pas les inégalités définissant $T(a, c)$.

$$|s^{(2n)}(a) - f^{(2n)}(a)| = \epsilon b^n$$

Pour $k \leq n$,

$$\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \leq \epsilon b^{k-n}$$

Donc,

$$d(s, f) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon b^{k-n} + \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} \leq \epsilon b^{-n} \frac{b^n - 1}{b - 1} + 2^{-n+1} \leq \epsilon + 2^{-n+1}$$

il suffit maintenant d'ajuster les paramètres :

On prend n assez grand pour que $2^{-n+1} < \epsilon$, ainsi $s \in B(f, 2\epsilon)$. Puis b suffisamment grand pour que $\epsilon b^n > 2(2n)!c^{2n}$, ainsi par inégalité triangulaire, $|s^{(2n)}(a)| > (2n)!c^{2n}$, donc s n'est pas dans $T(a, c)$.

On a trouvé des fonctions n'appartenant pas à $T(a, c)$ arbitrairement proche de f , donc $T(a, c)$ est d'intérieur vide.

□

Leçons concernées : espace complet, séries entières, continuité et dérivabilité.