5 $\mathrm{SO}_0(1,2) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$

ref : Un peu Mneimné tome 0 + Maison

Théorème 5.1 *Le groupe* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *est isomorphe à la composante connexe de l'identité dans* $\mathrm{SO}(1,2)$*, notée* $\mathrm{SO}_0(1,2)$.

Preuve.
det est une forme quadratique sur l'ensemble des matrices de trace nulle $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Cette forme quadratique est non dégénérée et de signature $(1,2)$:

$$\det\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = -x^2 - yz = -x^2 + \frac{1}{4}((y-z)^2 - (y+z)^2))$$

Notons (E,q) cet espace quadratique de dimension 3, isomorphe à $(\mathbb{R}^3, x^2-y^2-z^2)$.

Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit par conjugaison sur E car la trace est invariante par conjugaison et c'est une action par isométries car le déterminant est invariant par conjugaison.

Cela fournit donc un morphisme de groupes continu :

$$\Phi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{O}(E)$$

Comme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est connexe, l'image est un connexe qui contient l'identité, donc est incluse dans le sous-groupe $\mathrm{SO}_0(E)$.

Le noyau est formé de matrices qui commutent avec toutes les matrices de trace nulle donc ce sont des homothéties (toute droite étant droite stable d'une matrice de trace nulle, un telle application stabilise toutes les droites) , c'est donc $\{\pm \mathrm{id}\}$.

L'image est un sous-groupe connexe, si elle est ouverte elle est aussi fermée par propriété de groupes (partition en les classes à gauche modulo le sous-groupe), c'est donc la composante connexe du neutre. Il reste donc à montrer que l'image est ouverte. Il suffit que l'application soit ouverte en tous les points mais comme c'est un morphisme de groupes, il suffit que Φ est ouverte en id. En effet, si V voisinage de M dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $M^{-1}V$ est un voisinage de I_2 et $\Phi(V) = \Phi(M)\Phi(M^{-1}V)$ est un voisinage de $\Phi(M)$ dans $\mathrm{SO}_0(E)$.

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 3 de $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ car det est une submersion au dessus de 1. En effet, si $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\det_A(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A)H)$ qui est une forme linéaire non nulle puisque $\mathrm{com}(A)$ est non nulle. L'espace tangent en id est le noyau de la trace.

$\mathrm{SO}(E)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 3 de $\mathrm{End}(E)$.

Φ représente l'action par conjugaison, elle est donc définie sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. On va calculer sa différentielle sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ et obtenir celle sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ par restriction. On a $\Phi(A) : M \mapsto AMA^{-1}$, donc φ est $\mathcal{C}^1$ dans la variable A car l'inverse est $\mathcal{C}^1$ et la multiplication à gauche et à droite est $\mathcal{C}^1$. Calculons la différentielle en I_2.

$$\begin{aligned}\Phi(I_2+H) : M \mapsto (I_2+H)M(I_2+H)^{-1} &= M \mapsto (I_2+H)M(I_2 - H - H\epsilon(H)) \\ &= M \mapsto HM - MH + (MH - HMH)\epsilon(H)\end{aligned}$$

Alors :

$$\|\Phi(I_2+H) - \Phi(I_2) - [M,.]\|_{op} \leq \|H\|\delta(\|H\|)$$

avec $\delta \underset{0}{\to} 0$.

Donc $\mathrm{d}\Phi_{I_2}(H) = (M \to HM - MH)$. Cette différentielle est injective (donc bijective) car si $HM = MH$ pour tout M dans $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, comme précédemment, H est une homothétie de trace nulle, donc $H = 0$.

Ainsi, par le théorème d'inversion locale entre sous-variétés, Φ est ouverte au voisinage de I_2. Ainsi l'image est $\mathrm{SO}_0(1,2)$, d'où l'isomorphisme de groupe souhaité par passage au quotient $\tilde{\Phi} : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_0(E) \simeq (\mathrm{SO}_0(1,2))$.

En fait c'est un homéomorphisme : notons π la projection $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Si U est un ouvert de $\mathrm{SO}_0(E)$, $p^{-1}(\tilde{\varphi}^{-1}(U)) = \varphi^{-1}(U)$ est ouvert, donc $\widetilde{\varphi(U)}$ est ouvert par définition de la topologie quotient. Si V ouvert de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, $\tilde{\varphi}(U) = \tilde{\varphi}(\pi(\pi^{-1}(V)) = \varphi(\pi^{-1}(V))$ est ouvert car $\pi^{-1}(V)$ est ouvert et φ est ouverte.

$\square$

leçons concernées : action de groupe sur les espaces de matrices, groupe linéaire, sous-variétés, formes quadratiques réelles, inversion locale, applications différentiables