leçons : 201 Espaces de fc^0

Isomorphismes entre espaces de fonctions $\mathcal{C}(K)$ pour K compact métrique

31

Références : TAF Gourdon-Tosel (page 134-136)

Enoncé : Soient K_1 et K_2 deux espaces topologiques (métriques) compacts. Alors K_1 et K_2 sont homéomorphes ssi $\mathcal{C}(K_1)$ et $\mathcal{C}(K_2)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres.

preuve :

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : K_2 \to K_1$.

Alors $T : \begin{cases} \mathcal{C}(K_1) \to \mathcal{C}(K_2) \\ f \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$ est un isomorphisme d'algèbres

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $T : \mathcal{C}(K_1) \to \mathcal{C}(K_2)$ un isomorphisme d'algèbres.

1 MQ les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(K)$ pour K compact sont les $\operatorname{Ker} \delta_x = E_x$ pour $x \in K$. $\left(\delta_x : \begin{array}{l} \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x) \end{array} \right)$

Soit $x \in K$. E_x est un idéal et un hyperplan donc est un idéal maximal

Réciproquement, Soit I un idéal.

Supposons que I n'est contenu dans aucun E_x pour $x \in K$

Alors $\forall x \in K \quad \exists f \in I \quad f(x) \neq 0$

par continuité $\forall x \in K \quad \exists f_x \in I \quad \exists W_x$ voisinage de x $f_{|W_x}$ ne s'annule pas.

On recouvre K par un nombre fini de ces voisinages :

$$K = \bigcup_{i=1}^{p} W_{x_i}$$

On pose $f = \sum_{i=1}^{p} f_{x_i}^2$. $f \in I$ et f ne s'annule pas sur K

Donc f inversible dans $\mathcal{C}(K)$ et $I = \mathcal{C}(K)$

On en déduit que tout idéal maximal est un certain E_x.

Rq importante : $\forall x \neq y \quad E_x \setminus E_y \neq \emptyset$ et $E_y \setminus E_x \neq \emptyset$

② MQ $\exists \varphi : K_2 \to K_1$ $\forall f \in \mathcal{C}(K_1)$ $\forall x \in K_2$ $(Tf)(x) = f(\varphi(x))$

T induit une bijection naturelle entre les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(K_1)$ et ceux de $\mathcal{C}(K_2)$ $(I \mapsto T^{-1}(I))$. On pose, pour $x \in K_2$, $\varphi(x)$ l'unique élément $y \in K_1$ tel que $E^1_y = T^{-1}(E^2_x)$.

Soit $f \in \mathcal{C}(K_1)$ et $x \in K_2$.

$$\begin{aligned}(Tf)(x) = 0 &\iff Tf \in E^2_x \\ &\iff f \in T^{-1}(E^2_x) \\ &\iff f \in E^1_{\varphi(x)} \\ &\iff f(\varphi(x)) = 0\end{aligned}$$

On pose $g_x : \begin{cases} K_1 \to \mathbb{R} \\ y \mapsto f(y) - (Tf)(x) \end{cases}$, T isomorphisme d'algèbres donc

$(g_x \in \mathcal{C}(K_1))$

$T(1) = 1$. On en déduit que $(Tg_x)(x) = (Tf)(x) - (Tf)(x) = 0$

Donc $g_x(\varphi(x)) = 0$ ie $\boxed{f(\varphi(x)) = (Tf)(x)}$

③ MQ φ est continue

K_2 étant métrique, on va utiliser le critère séquentiel

Soit $(x_n) \in K_2^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$, on pose $y_n = \varphi(x_n)$. MQ $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$

K_1 est compact donc il suffit de mq $\varphi(x)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite (y_n). Supposons donc avoir extrait et que $y_n \to y \neq \varphi(x)$

D'après la rq importante : $\exists f \in \mathcal{C}(K_1)$ $f \in E^1_y$ et $Tf \notin E^2_x$

ie $f(y) = 0$ et $(Tf)(x) \neq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f(\varphi(x_n)) = (Tf)(x_n) = f(y_n)$

f est continue, Tf est continue donc $(Tf)(x) = f(y)$ en passant à la limite

c'est absurde donc φ est continue.

④ En faisant le même raisonnement avec T^{-1}, on construit $\psi : K_1 \to K_2$ continue telle que $\forall f \in \mathcal{C}(K_2)$ $\forall x \in K_1$ $(T^{-1}f)(x) = f(\psi(x))$

On obtient $\forall f \in \mathcal{C}(K_1)$ $\forall x \in K_2$ $f(x) = f((\psi \circ \varphi)(x))$

$\mathcal{C}(K_1)$ sépare les points donc $x = (\psi \circ \varphi)(x)$

De la même manière $\forall y \in K_1$ $(\varphi \circ \psi)(y) = y$. Donc φ homéomorphisme.