leçons:
150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrice.
153 : Polynomes d'endom^{rf} en dim finie.
154 : Sous-espaces stables par un endom^{rf}
160 : Endom^{rf} remarquables d'un ev euclidien

Réduction des endomorphismes normaux

34

Référence : Gourdon "Algèbre" (preuve ≠)

Thm : E un espace euclidien de dimension n, N l'ensemble des endomorphismes normaux de E. Pour $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$, on pose $N(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Si $f \in N$, alors il existe une bon e de E telle que $\mathrm{mat}_e(f) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & a_k & & \\ & & & N(u_{k+1}) & \\ (0) & & & & \ddots \; N(u_n) \end{pmatrix}$

où $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $u_{k+1}, \dots, u_n \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

preuve :

① <u>lemme 1</u> : Soit $f \in N$ et F un sev de E stable par f. Alors $F^\perp$ est stable par f.

<u>preuve</u> : Soit e une bon de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$

Alors $\mathrm{mat}_e(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = M$.

f est normal et e est orthonormée donc $\mathrm{mat}_e(f^*) = {}^tM$ et $M{}^tM = {}^tMM$.

D'où
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A{}^tA + B{}^tB & B{}^tC \\ C{}^tB & C{}^tC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tAA & {}^tAB \\ {}^tBA & {}^tBB + {}^tCC \end{pmatrix}$$

On en tire $A{}^tA + B{}^tB = {}^tAA$

et en passant à la trace : $\mathrm{Tr}\, B{}^tB = 0$

D'où $B = 0$. ($(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire)

② <u>lemme 2</u> : $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f n'a pas de valeurs propres, alors f admet un plan stable.

<u>preuve</u> : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ sans valeurs propres. Soit μ son polynôme minimal sur $\mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}[X]$.

μ n'a pas de racines réelles donc, dans $\mathbb{R}[X]$: $\mu = PQ$

avec $\begin{cases} P \text{ irréductible unitaire de degré } 2 \\ Q \in \mathbb{R}[X] \end{cases}$

(on utilise ici la décomposition en irréductibles des polynômes de $\mathbb{R}[X]$)

$Q(f) \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tq $Q(f)(x) = y \neq 0$

On pose $I = \{ S \in \mathbb{R}[X] \mid S(f)(y) = 0 \}$. I est un idéal de $\mathbb{R}[X]$

et $\mathbb{R}[X]$ est principal donc il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tq $I = (R)$

On a $\mu(f) = 0 = P(f) \circ Q(f)$ donc $P(f)(y) = \mu(f)(x) = 0$

donc $P \in I$ donc $R \mid P$

P irréductible donc $R = 1$ ou $R = P$.

Si $R = 1$, $I = \mathbb{R}[X]$ et $y = 0$. Absurde
Donc $R = P$ et $I = (P)$
Ainsi $F = \{ S(f)(y) \mid S \in \mathbb{R}[X] \} \simeq \dfrac{\mathbb{R}[X]}{(P)}$ est un plan stable par f.

③ On montre maintenant par récurrence le résultat :

$n = 1$: OK

$n = 2$: Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 et $f \in N$ sans valeurs propres.

Soit $(e_1, e_2) = e$ une bon de E et $M = \mathrm{mat}_e(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

On obtient $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ donc $b = \pm c$ et comme M est sans valeur propre, on a nécessairement $M \notin S_2(\mathbb{R})$

donc $b = -c$.

D'où $ac - cd = -ac + ad$

$(a-d)c = 0$

$a = d$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}}$$

Si $f \in N$ a une valeur propre λ_1.

Soit v_1 un vecteur propre associé. $(\mathbb{R}v_1)^\perp$ est stable par f par ①

et (v_1, v_2) où $\mathbb{R}v_2 = (\mathbb{R}v_1)^\perp$ est une bon qui diagonalise f.

Hérédité : E de dimension $n+2$ avec $n \geq 1$. $f \in N$.

1er cas : f admet une valeur propre λ_1

On note $E_{\lambda_1}(f)$ l'espace propre associé.

Soit e une bon adaptée à $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_1}(f)^\perp$.

$f|_{E_{\lambda_1}(f)^\perp}$ est normal et l'hypothèse de récurrence s'applique.

par ① c'est un endomorphisme.

2e cas : f n'admet pas de valeurs propres.

Alors si F est un plan stable donné par ②, $E = F \oplus F^\perp$

et $F^\perp$ est stable par f par ① donc $f|_{F^\perp}$ est un endomorphisme normal

et l'hypothèse de récurrence s'applique.