Rud

Théorème de Fourier-Plancherel

L 201 L213
L 202 L234
L 205 L235
L 207 L239
L 208 L250

On définit la transformée de Fourier sur $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{F} : \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0$

$$f \mapsto \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)\,dt$$

Théorème de Fourier-Plancherel : $\forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, on a : $\frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$

Ainsi, la transformée de Fourier sur $\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$ se prolonge en un unique opérateur continu de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, qui est une isométrie à constante près.

Démonstration : ① Introduction d'une fonction g et ses propriétés.

Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. On pose $\tilde{f} : x \mapsto \overline{f(-x)}$. On a $\tilde{f} \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$.

On définit $g = \tilde{f} * f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t-x)}\, f(t)\,dt$, de sorte que :

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}\, f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt = \|f\|_2^2$$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(x) = \widehat{\tilde{f} * f}(x) = \hat{\tilde{f}}(x) \cdot \hat{f}(x) = \overline{\hat{f}}(x) \cdot \hat{f}(x) = |\hat{f}(x)|^2 \geqslant 0$

On a : $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ en tant que produit de convolution de 2 fonctions $\mathbb{L}^1$;

g est bornée car par Cauchy-Schwarz, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leqslant \|f\|_2^2$;

g est continue sur $\mathbb{R}$ par composition car comme $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $x \mapsto \tau_{-x}(f)$ est continue, puis par Cauchy-Schwarz, $x \mapsto \langle \tau_{-x}(f), f \rangle$ est continue.

② On introduit une (bonne) approximation de l'unité.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $s_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}$

On remarque : $\hat{s}_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2n^2}}$ puis $\hat{\hat{s}}_n(x) = \sqrt{2\pi}\, n\, e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} = 2\pi\, s_n(x)$

Montrons que : $\lim_{n \to \infty} (s_n * g)(0) = g(0)$

Soit $\varepsilon > 0$. g est continue en 0 donc $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant \alpha \Rightarrow |g(x) - g(0)| \leqslant \varepsilon$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|(s_n * g)(0) - g(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} s_n(x) g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} s_n(x) g(0)\,dx \right|$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} s_n(x)\, |g(x) - g(0)|\,dx$$

$$\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} s_n(x)\, |g(x) - g(0)|\,dx + \int_{|x| > \alpha} s_n(x)\, |g(x) - g(0)|\,dx$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} s_n(x)\,dx + 2\|g\|_\infty \cdot 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{4\|g\|_\infty}{\sqrt{2\pi}} \int_{n\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

Or, par CVD, $\lim_{n\to\infty} \int_{n\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$

D'où $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |(\rho_n * g)(0) - g(0)| \leqslant \varepsilon + \frac{4\|g\|_\infty}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon$

puis $\lim_{n\to\infty} (\rho_n * g)(0) = g(0) = \|f\|_2^2$

③ Calculons d'une autre façon cette limite.

On a, d'après le théorème de Fubini-Lebesgue, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\rho_n * g)(0) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\hat{\rho}}_n(x) g(x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \hat{\rho}_n(t) dt \right) dx$$

$$\underset{F-L}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g(x) dx \right) dt$$

$$\underline{(\rho_n * g)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}_n(t) \hat{g}(t) dt}$$

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{\rho}_n(t) \to 1$ en croissant puis $\hat{\rho}_n(t) \hat{g}(t) \to \hat{g}(t)$ en croissant

De plus, $\hat{\rho}_n \hat{g} \geqslant 0$ et mesurable,

Par CVM, $\lim_{n\to\infty} (\rho_n * g)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2$.

D'où, par unicité de la limite, $\underline{\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2}$.

Ce qui montre que $\hat{f} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

④ <u>Extension de $\mathcal{F}$ à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$</u>

L'application $\mathcal{F} : \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est ainsi bien définie,
et de fait linéaire continue, donc uniformément continue;
Par troncature, $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. En effet,
Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, on pose $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$ par C-S et par CVD, $\|f_n - f\|_2 \to 0$.
Enfin, $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, donc complet.
D'après le th de prolongement, on peut prolonger $\mathcal{F}$ en un unique opérateur continu, encore noté $\mathcal{F}$, de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

De plus, par passage à la limite dans l'égalité, on a :

$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}(f)\|_2$, ie $\mathcal{F}$ est, à cste près, une isométrie de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.