Gou, An

Formule sommatoire de Poisson

L 228
L 235
L 239
L 241
L 246
L 250

Th : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \to +\infty$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$

Démonstration : On pose $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x + 2\pi n)$.

On a : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = f'(x + 2\pi n)$.

Mq $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ CVN (et donc CVU) sur tt segment de $\mathbb{R}$.

Comme $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$: $\exists M > 0$, $\exists A > 0$, $\forall |x| \geq A$, $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$.

Soit $K > 0$ et $x \in [-K, K]$, on a $\forall n \in \mathbb{Z}$, si $|n| > \frac{1}{2\pi}(K + A)$, alors :

$$|f_n(x)| = |f(x + 2\pi n)| \leq \frac{M}{(x + 2\pi n)^2} \leq \frac{M}{(2\pi|n| - K)^2}$$

Par suite, $\sum f_n$ CVN sur $[-K, K]$.

En particulier, $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}$. On note $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi n)$ sa limite

On obtient de m̂, $\sum f_n'$ CVU sur tt compact de $\mathbb{R}$.

D'après le th de dérivation, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, F est 2π-périodique :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall N \in \mathbb{Z}$, on a $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} f(x + 2\pi n + 2\pi) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x + 2\pi n)$

qd $N \to +\infty$, on obtient $F(x + 2\pi) = F(x)$.

Calculons les coefficients de Fourier de F pour appliquer le th de Dirichlet :

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle c_n(F) = \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t + 2\pi k) e^{-int} dt$

$$\underset{\text{CVU sur } [0, 2\pi]}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(t + 2k\pi) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n)$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$

Application : On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$, la fonction de Jacobi θ satisfait l'équation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)$

Démonstration : Soit $\sigma > 0$, on considère la gaussienne $f_\sigma : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Appliquons la formule sommatoire de Poisson à f_σ, en $x = 0$:

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-ixt}\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(x,t)\, dt$

On a : • $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-ixt} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

• $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -it\, g(x,t)$

donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq |t|\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

D'après le th de dérivabilité sous le signe intégrale, $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}'(x) = \int_{\mathbb{R}} -it\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-ixt}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{-t}{2\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} . i\sigma^2 e^{-ixt}\, dt$$

$$\underset{IPP}{=} \left[e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} . e^{-ixt} i\sigma^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} . i\sigma^2 . -ixe^{-ixt}\, dt$$

$$= -x\sigma^2 . \hat{f}(x)$$

En résolvant l'EDO, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}}$

Or $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = \sqrt{2\pi}\,\sigma$. D'où $\hat{f}(x) = \sqrt{2\pi} . \sigma . e^{-\frac{x^2\sigma^2}{2}}$.

Ainsi, $\forall \sigma > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{2\pi}\,\sigma\, e^{-\frac{\sigma^2 n^2}{2}}.$$

En choisissant σ tq $\frac{2\pi}{\sigma^2} = x$, on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \quad \text{ie } \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)$$