Leçons : 204 : connexité
228 : $c^{té}$ et dérivabilité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Thm de Sard (version faible)

30

Références : FGN Analyse 1

Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, on pose $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$. Alors $f(C)$ est de mesure de Lebesgue nulle.

preuve :

① Simplification du problème :

$$f(C) = f\Big(\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} (C \cap [-N,N])\Big) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} f(C \cap [-N,N])$$

Il suffit de mq pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f(C \cap [-N,N])$ est négligeable.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. Il suffit de mq $\forall \varepsilon > 0$ $\lambda(f(C \cap [-N,N])) < \varepsilon$

On pose, pour $\delta > 0$ fixé, $C_\delta = \{x \in \mathbb{R} \mid \|f'(x)\|_\infty < \delta\}$. C_δ ouvert de $\mathbb{R}$ car f C^1

$\forall \delta > 0$ $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $C \cap [-N,N] \subset C_\delta \cap [-N,N]$

donc il suffit de mq $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\lambda(f(C_\delta \cap [-N,N])) < \varepsilon$ (N fixé)

② lemme : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors il existe une famille dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $U = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} I_p$.
c'est la décomposition en composantes connexes de U.

preuve du lemme : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$.

On pose $U = \coprod_{i \in \Theta} I_i$ (décomposition en composantes connexes). I_i connexe de U donc de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les connexes de $\mathbb{R}$ donc I_i est un intervalle pour tout $i \in \Theta$

MQ I_i est ouvert dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in I_i$, $\exists \alpha > 0$ $]x-\alpha, x+\alpha[\subset U$

$I_i \cup]x-\alpha, x+\alpha[$ est connexe comme union non disjointe de deux connexes.

mais I_i est le plus grand connexe qui contient x dans U et $I_i \cup]x-\alpha, x+\alpha[\subset U$

donc $I_i \cup]x-\alpha, x+\alpha[\subset I_i$ donc $]x-\alpha, x+\alpha[\subset I_i$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et on peut trouver une surjection $\mathbb{Q} \to \Theta$ donc Θ dénombrable

③ <u>Application à C_δ :</u>

$$C_\delta = \coprod_{p\in\mathbb{N}} I_p$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall x,y \in I_p \cap [-N,N]$ $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leqslant \delta |x-y|$ (TAF)

On fixe $x \in I_p \cap [-N,N]$ $f(I_p \cap [-N,N]) \subset B_\infty(f(x), \delta\lambda(I_p \cap [-N,N]))$

Donc $\lambda(f(I_p \cap [-N,N])) \leqslant (2\delta\lambda(I_p \cap [-N,N]))^n$

$$\leqslant 2^n \delta^n (2N)^{n-1} \lambda(I_p \cap [-N,N])$$

$$\begin{aligned}
\lambda(f(C_\delta \cap [-N,N])) &= \lambda\left(f\left(\left(\coprod_{p\in\mathbb{N}} I_p\right) \cap [-N,N]\right)\right) \\
&= \lambda\left(f\left(\coprod_{p\in\mathbb{N}} (I_p \cap [-N,N])\right)\right) \\
&= \lambda\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} f(I_p \cap [-N,N])\right) \\
&\leqslant \sum_{p\in\mathbb{N}} \lambda(f(I_p \cap [-N,N])) \\
&\leqslant \sum_{p\in\mathbb{N}} 2^n\delta^n (2N)^{n-1} \lambda(I_p \cap [-N,N]) \\
&\leqslant 2^n\delta^n(2N)^{n-1} \lambda\left(\coprod_{p\in\mathbb{N}} (I_p \cap [-N,N])\right) \\
&\leqslant 2^n\delta^n(2N)^{n-1} \lambda(C_\delta \cap [-N,N]) \\
&\leqslant 2^n\delta^n(2N)^n \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.